

Exercice 1

En septembre 2021, une entreprise a fait le choix de développer le télétravail.

Elle propose alors à ses 12 000 collaborateurs en Finlande de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En septembre 2021, seuls 800 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 78% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 1100 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par une suite notée (u_n) .

Le terme u_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de septembre 2021.

Ainsi $u_0 = 800$.

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,78 + 1100 = 1724$.

78% des collaborateurs choisissent de conserver le travail ce qui correspond à une multiplication par 0,78 du nombre de salariés le mois précédent et en plus 1100 nouveaux collaborateurs choisissent le travail chaque mois donc $u_{n+1} = 0,78u_n + 1100$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 5000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,78.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5000 = 0,78u_n + 1100 - 5000 = 0,78v_n - 3900$

Or $v_n = u_n - 5000$ donc $u_n = v_n + 5000$.

D'où $v_{n+1} = 0,78(v_n + 5000) - 3900 = 0,78v_n + 3900 - 3900 = 0,78v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,78 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5000 = -4200$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,78^n = -4200 \times 0,78^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 5000 = 5000 - 4200 \times 0,78^n$.

3. a. A l'aide de la calculatrice, on trouve que $u_5 \approx 3787 < 4000$ et $u_6 \approx 4054 > 4000$

Donc le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n > 4000$ est $n = 6$

Cela signifie qu'à partir du 6^{ème} mois, soit à partir de mars 2022, il y aura plus de 4000 collaborateurs qui pratiqueront le télétravail.

Partie B

Afin d'apprécier les conséquences de cette mesure, l'entreprise est parvenue à modéliser le nombre de salariés satisfaits par ce dispositif à l'aide d'une suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 3}{a_n + 4}$$

Où a_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de septembre 2021.

1. Démontrer que la fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x+3}{x+4}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 6x + 3$ et $v(x) = x + 4$

$u'(x) = 6$ et $v'(x) = 1$

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Donc pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{6(x+4) - 1 \times (6x+3)}{(x+4)^2} = \frac{24-3}{(x+4)^2} = \frac{21}{(x+4)^2}$

$f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$: « $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 3$ » la proposition au rang n .

• Initialisation : Si $n = 0$:

D'une part $a_0 = 1$

D'autre part $a_1 = f(a_0) = f(1) = \frac{6+3}{1+4} = \frac{9}{5}$ donc $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq 3$ donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie (ie $0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq 3$).

On veut montrer qu'alors $P(k+1)$ est vraie (ie $0 \leq a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq 3$).

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq 3$.

Et, par définition de la suite (a_n) , $a_{k+1} = f(a_k)$ et $a_{k+2} = f(a_{k+1})$.

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc :

$0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq 3 \Rightarrow f(0) \leq f(a_k) \leq f(a_{k+1}) \leq f(3)$

$$\text{Donc : } \frac{3}{4} \leq a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq 3$$

De plus, $0 < \frac{3}{4}$ donc $0 \leq a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq 3$.

Donc $P(k+1)$ est vraie si $P(k)$ l'est.

• Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire donc, pour tout entier naturel n , $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 3$.

b. On en déduit que la suite (a_n) est croissante et bornée

c. Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits du dispositif augmente au fil des mois et que ce nombre sera compris entre 1000 et 3000 collaborateurs

Exercice 2

Affirmation 1 : Toute suite croissante est minorée.

Vrai : toute suite croissante est minorée par son premier terme.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_0 \leq u_n$

Affirmation 2 : Toute suite bornée est monotone.

Faux : Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée mais non monotone.

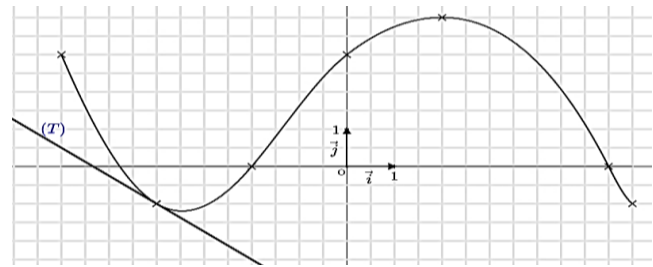
Exercice 3 :

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 6]$ dans un repère orthonormé. La droite (T) tracée est tangente à la courbe représentative de f .

1. Vrai ou faux ? Justifier soigneusement votre réponse. Une réponse non justifiée n'apporte aucun point.

Affirmation 1 : Faux car la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(2) = 0$.

Affirmation 2 : $f'(4) < 0$ Vrai sur $[2; 6]$ f est strictement décroissante et $4 \in [2; 6]$ donc $f'(4) < 0$.



2. $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse -4 , c'est-à-dire de T donc $f'(-4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{4}$ donc l'affirmation est vraie.

Exercice 4 :

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4\right)^3$

$f = u^n$ où $n = 3$ et $u : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = nu'u^{n-1}$

Donc pour tout réel x , $f'(x) = 3 \times (-x + 7) \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4\right)^2$

Pour tout réel x on a $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4\right)^2 \geq 0$ et $3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

$-x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ et $m = 1 > 0$ donc :

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 7]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[7; +\infty[$

Conclusion : La fonction f est croissante sur $]-\infty; 7]$ et décroissante sur $[7; +\infty[$. Elle admet donc en $x = 7$ un maximum égal à $f(7) = \left(-\frac{1}{2} \times 7^2 + 7 \times 7 - 4\right)^3 = 20,5^3 = 8615,125$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-5x}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

a. $g = e^u$ où $u : x \mapsto x^2 - 5x$

• u est définie sur $\mathbb{R}$ donc g aussi. L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R}$.

• u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = u'e^u$.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = x^2 - 5x$ donc $u'(x) = 2x - 5$

Donc : $g'(x) = (2x - 5) \times e^{x^2-5x}$

Ainsi, pour tout réel x , $g'(x) = (2x - 5) e^{x^2-5x}$.

b. Pour tout réel x , $e^{x^2-5x} \neq 0$ donc : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

On en déduit que la représentation graphique de g admet exactement une tangente parallèle à l'axe des abscisses, au point d'abscisse $\frac{5}{2}$.