

Contrôle n°1 de spécialité Mathématiques

Durée : 1h30

La calculatrice est autorisée

Le barème (sur 16 points) est donné à titre indicatif, il pourra être modifié

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sauf mention contraire, TOUTES LES REPONSES doivent être justifiées.

Exercice 1 (8 points)

En septembre 2021, une entreprise a fait le choix de développer le télétravail.

Elle propose alors à ses 12 000 collaborateurs en Finlande de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En septembre 2021, seuls 800 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 78% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 1100 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par une suite notée (u_n) .

Le terme u_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de septembre 2021. Ainsi $u_0 = 800$.

Partie A

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,78u_n + 1100$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 5000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,78.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5000 - 4200 \times 0,78^n$.
4.
 - a. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 4000$. On pourra s'aider de la calculatrice.
 - b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Afin d'apprécier les conséquences de cette mesure, l'entreprise est parvenue à modéliser le nombre de salariés satisfaits par ce dispositif à l'aide d'une suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 3}{a_n + 4}$$

où a_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de septembre 2021.

1. Démontrer que la fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x+3}{x+4}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 3$.
 - b. Que peut-on en déduire pour la suite (a_n) ?
 - c. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (1,5 points)

Vrai ou faux ? Justifier la réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point)

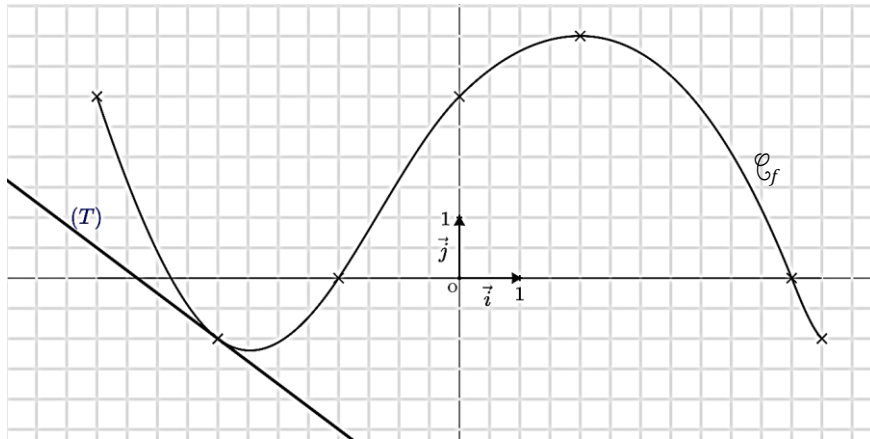
Affirmation 1 : Toute suite croissante est minorée.

Affirmation 2 : Toute suite bornée est monotone.

Tournez s'il vous plaît

Exercice 3 (2,5 points)

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 6]$. La droite (T) tracée est tangente à la courbe représentative de f .



1. Vrai ou faux ? Justifier soigneusement votre réponse. Une réponse non justifiée n'apporte aucun point.

Affirmation 1 : $f'(2) = 4$

Affirmation 2 : $f'(4) < 0$

2. Déterminer graphiquement $f'(-4)$.

Exercice 4 (4 points)

Les questions 1. et 2. de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4\right)^3$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ce maximum.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-5x}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
 - a. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis exprimer $g'(x)$ en fonction de x .
 - b. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une ou des tangente(s) parallèle(s) à l'axe des abscisses ? Justifier votre réponse algébriquement.