

Incertitudes de mesure

Exercice N° 1 : Mesure de la résistance R d'un conducteur ohmique

- 1) **Préciser**, pour chacun des mesurages ❶ et ❷, quel type d'évaluation des incertitudes de mesure (type A ou type B) pourra être effectué. **Justifier**.

Mesurage ❶ : Un seul résultat de mesure est obtenu et la précision de l'appareil est fournie, permettant de déterminer l'incertitude d'instrument → évaluation des incertitudes de **type B**

Mesurage ❷ : Dix résultats de mesure directe de la grandeur ont été obtenus, avec une variabilité suffisante au sein de la série. On suppose les mesures effectuées dans de bonnes conditions de répétabilité et indépendantes. Aucune indication n'est donnée sur l'appareil, empêchant l'évaluation de l'incertitude d'instrument. → évaluation de **type A** des incertitudes

- 2)
a. **Calculer** l'incertitude-type élargie sur R à un niveau de 95 % pour chacun des mesurages ❶ et ❷.

Déterminons tout d'abord les incertitudes-type sur R pour chacun des mesurages.

Mesurage ❶ [Type B] : Le meilleur estimateur de la valeur mesurée est la valeur mesurée elle-même (987.8 Ω) dans le cas d'une mesure unique.

On suppose que la seule source d'incertitude est la variabilité due à l'instrument et prise en compte par l'incertitude d'instrument.

La distribution des résultats de mesure instrumentale est supposée rectangulaire, de demi-étendue a égale à la précision Δ de l'instrument. L'écart-type de cette distribution est donc égal à $\sigma_{\text{instrument}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$\sigma(R) = \sigma_{\text{instrument}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

$$\text{A.N. : } \Delta = \frac{0.8}{100} \times 987.8 + 4 \times 0.1 = 8.3 \, \Omega, \text{ d'où : } \sigma(R) = \frac{8.3}{\sqrt{3}} = \boxed{4.8 \, \Omega} \text{ [2 CS]}$$

Mesurage ❷ [Type A] : On effectue un traitement statistique des données expérimentales recueillies. Le meilleur estimateur de la valeur mesurée est la moyenne arithmétique des valeurs obtenues, et le meilleur estimateur de l'écart-type de l'estimateur est l'écart-type expérimental sur la moyenne, qui permet d'évaluer la précision de cette dernière.

Avec utilisation du tableau Excel :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Mesure N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	Valeurs de résistance (ohm)	986.1	987.4	988.1	987	988	987.8	986.9	988.9	987.3	988.2	
3												
4	Plage de valeurs	B2:K2		Valeurs_de_résistance_ohm								
5	Moyenne arithmétique	987.57		=MOYENNE(Valeurs_de_résistance_ohm)								
6	Ecart-type expérimental sur les données expérimentales	0.80		=STDEVA(Valeurs_de_résistance_ohm)								
7	Ecart-type expérimental sur la moyenne arithmétique des données	0.25		=C6/RACINE(NB(Valeurs_de_résistance_ohm))								
8												

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i = 987.57 \, \Omega$$

$$\sigma(\bar{R}) = \frac{\sigma_{\text{exp}}(R)}{\sqrt{N}} = \boxed{0.25 \, \Omega} \text{ [2 CS]} \text{ (incertitude – type de répétabilité)}$$

N.B. : Le calcul du meilleur estimateur de la valeur mesurée n'est pas explicitement demandé à cette question et aurait donc pu être effectué à la question suivante uniquement.

Passons à présent aux incertitudes-types de mesure élargies à un niveau de confiance de 95 %. La distribution de valeurs expérimentales est supposée gaussienne dans les deux cas : le facteur d'élargissement k est donc environ égal à 2.

$$\text{Mesurage ❶ [Type B] : } \delta(R) = k \times \sigma(R) \text{ A.N. : } \delta(R) = 2 \times 4.8 = \boxed{9.6 \, \Omega} \text{ [2 CS]}$$

$$\text{Mesurage ❷ [Type A] : } \delta(R) = k \times \sigma(R) \text{ A.N. : } \delta(R) = 2 \times 0.25 = \boxed{0.50 \, \Omega} \text{ [2 CS]}$$

Nom et prénom de l'élève :

- a. **Présenter** le résultat de chacun des mesurages ❶ et ❷ sous la forme d'un intervalle de confiance, avec le nombre de chiffres significatifs qui convient.

Les intervalles de confiance proposés sont tous centrés sur les meilleurs estimateurs de la valeur mesurée obtenus pour chacun des deux mesurages.

Mesurage ❶ [Type B] : $R = (987.8 \pm 9.6) \, \Omega$ [$k = 2, 95 \%$]

Mesurage ❷ [Type A] : $R = (987.58 \pm 0.50) \, \Omega$ [$k = 2, 95 \%$]

N.B. : Chaque incertitude-type est fournie avec 2 CS, la position du dernier CS de l'incertitude-type élargie déterminant celle du dernier CS à donner pour le meilleur estimateur de la valeur mesurée au sein de l'intervalle de confiance.

- 3) **Préciser**, pour chacun des mesurages ❶ et ❷, si le meilleur estimateur de la valeur mesurée est compatible avec la valeur de référence fournie par le constructeur.

Calculons les écarts normalisés pour chacun des deux mesurages, afin de conclure quant à la compatibilité métrologique entre les données. La valeur de référence est ici la valeur fournie par le constructeur : $R_{\text{ref}} = (1000 \pm 50) \, \Omega$ [$k = 1, 68 \%$]. Rappelons que, dans le calcul de l'écart normalisé, ce sont les incertitudes-type qui sont utilisées (et non pas les incertitudes-type élargies).

$$z = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{[\sigma(m_1)]^2 + [\sigma(m_2)]^2}}$$

$$\text{Mesurage ❶ [Type B]} : z = \frac{|987.8 - 1000|}{\sqrt{[4.8]^2 + [50]^2}} = \boxed{0.24} < 2$$

$$\text{Mesurage ❷ [Type A]} : z = \frac{|987.58 - 1000|}{\sqrt{[0.25]^2 + [50]^2}} = \boxed{0.25} < 2$$

Les écart normalisés sont inférieurs à deux : les valeurs sont compatibles.

- 4) **Conclure** quant au mesurage le plus précis entre les deux étudiés ici.

On calcule les incertitudes-type relatives afin de pouvoir identifier dans quel cas elle est la plus élevée.

$$\text{Mesurage ❶ [Type B]} : \frac{\delta(R)}{R} = \frac{4.9}{987.8} = \boxed{0.50 \, \%}$$

$$\text{Mesurage ❷ [Type A]} : \frac{\delta(R)}{R} = \frac{0.25}{987.58} = \boxed{2.5 \times 10^{-2} \, \%}$$

Le mesurage ❷ est donc plus précis que le mesurage ❶.

N.B. : Les incertitudes-type aurait pu être utilisées directement pour conclure, mais il est plus rigoureux d'utiliser l'incertitude-type relative, qui permet de repérer les termes dominants d'incertitudes et de comparer entre elles des incertitudes relatives à des grandeurs de dimensions différentes.

- 5) Un second ohmmètre est utilisé pour effectuer à nouveau le mesurage ❶ sur le conducteur ohmique étudié dans cet exercice ; sa précision est analogue à celle de l'ohmmètre utilisé précédemment dans le mesurage ❶. La valeur affichée est à présent de $835.1 \, \Omega$ et le critère de compatibilité métrologique avec la valeur de référence n'est plus respecté. **Proposez** une explication à ce résultat, ainsi qu'un moyen d'étayer votre raisonnement.

L'évaluation des incertitudes de mesure ne permet d'estimer que les erreurs aléatoires. Or, la valeur de la résistance a déjà été validée ici, donc la valeur obtenue avec ce ohmmètre peut être considérée comme aberrante, puisqu'elle se situe à plus de deux écart-types de la valeur de référence (dans l'approximation d'une distribution gaussienne des données expérimentales).

Il se peut donc qu'il y ait une erreur systématique importante avec ce second ohmmètre, qui expliquerait cet écart important que l'on ne peut pas attribuer à la variabilité aléatoire de la grandeur. Cette erreur systématique pourrait être due à un mauvais étalonnage de l'appareil.

Il faudrait prendre un conducteur ohmique étalon, dont la valeur de résistance est proche de $1\,000 \, \Omega$, et mesurer sa valeur avec le second ohmmètre. Si l'écart algébrique à la mesure est identique à celui observé précédemment, l'hypothèse d'une erreur systématique est dès lors plus plausible et un réétalonnage de ce ohmmètre défectueux pourrait être envisagé.

Chapitre 0 : Rudiments de métrologie

Exercice N° 2 : Déviation de la lumière par le Soleil

- 1) **Déterminer** la dimension de la constante de gravitation universelle G .

On cherche la dimension de G , notée $[G]$, telle que la norme de la force d'interaction gravitationnelle soit bien homogène à une force, ce qui se traduit sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$F = G \frac{m m'}{r^2} \rightarrow [G] = \frac{[F] [r^2]}{[m m']} = (M L T^{-2}) L^2 M^{-2} = \boxed{L^3 M^{-1} T^{-2}}$$

- 2) **Déterminer**, par analyse dimensionnelle et en choisissant la solution la plus simple, l'expression de l'angle de déviation θ d'un rayon lumineux passant très près du Soleil (soit $b \sim R_S$). Cet angle est une fonction monôme de la vitesse de la lumière dans le vide c , de la masse M_S du Soleil, de la constante de gravitation universelle G et du rayon R_S du Soleil. La valeur de la constante adimensionnée K présente dans la relation obtenue par analyse dimensionnelle est prédite par la théorie de la relativité générale d'Einstein : $K = 4.00$.

D'après l'énoncé, $\exists (K, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^5$ tels que : $\theta = K c^\alpha M_S^\beta G^\gamma R_S^\delta$. K est une constante adimensionnée ($[K] = 1$), dont la valeur ne pourra pas être prédite par analyse dimensionnelle. Sa valeur est néanmoins fournie par l'énoncé : $K = 4.00$.

Pour que la relation soit homogène, il faut nécessairement que :

$$[\theta] = [K] [c^\alpha] [M_S^\beta] [G^\gamma] [R_S^\delta] = 1 (L T^{-1})^\alpha M^\beta (L^3 M^{-1} T^{-2})^\gamma L^\delta = L^{\alpha+3\gamma+\delta} M^{\beta-\gamma} T^{-\alpha-2\gamma}$$

θ étant sans dimension ($[\theta] = 1$), ceci conduit au système de trois équations à quatre inconnues :

$$\alpha + 3\gamma + \delta = 0 \quad (a); \quad \beta - \gamma = 0 \quad (b); \quad -\alpha - 2\gamma = 0 \quad (c)$$

La solution n'est pas unique. En choisissant γ comme paramètre, on obtient :

$$\alpha = -2\gamma, \quad \beta = \gamma, \quad \delta = -\gamma. \quad \text{Soit : } \theta = K (c^{-2} M_S G R_S^{-1})^\gamma$$

Les solutions les plus simples correspondent à $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$, soit :

$$\theta = K \frac{G M_S}{c^2 R_S} \quad \textcircled{1} \quad \text{ou} \quad \theta = K \frac{c^2 R_S}{G M_S} \quad \textcircled{2}$$

Nous pouvons faire une application numérique pour chaque cas :

$$\textcircled{1} \Rightarrow \theta = 2,1 \cdot 10^{-6} K \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \Rightarrow \theta = 4,7 \cdot 10^5 K$$

Connaissant grâce à l'énoncé la valeur de K , nous constatons que $\textcircled{2}$ conduit à une valeur aberrante. Finalement, avec $K = 4$, la déviation θ s'écrit et vaut :

$$\boxed{\theta = K \frac{G M_S}{c^2 R_S}}$$

- 3) **Évaluer** numériquement la valeur de l'angle de déviation θ en radians (rad) puis en secondes d'arc (").

$$\theta = K \frac{G M_S}{c^2 R_S} \quad \text{A.N. : } \theta = 4.00 \times \frac{(6.67 \times 10^{-11}) \times (1.99 \times 10^{30})}{(3.00 \times 10^8)^2 \times (6.96 \times 10^8)} = \boxed{8.48 \times 10^{-6} \text{ rad}} \quad (3 \text{ CS})$$

$$\theta = \left(8.48 \times 10^{-6} \times \frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(8.48 \times 10^{-6} \times \frac{360}{2\pi} \times 60\right)' = \left(8.48 \times 10^{-6} \times \frac{360}{2\pi} \times 3\,600\right)'' = \boxed{1.75''} \quad (2 \text{ CS})$$

Lorsque le rayon lumineux possède un paramètre d'impact $b = x R_S$ (où x est un réel quelconque supérieur à 1), on peut montrer que l'angle de déviation du rayon lumineux est : $\theta = \frac{1.75''}{x}$.

C'est la Société Astronomique Royale de Londres qui, en 1919, à partir de clichés photographiques réalisés lors d'éclipses de Soleil au Brésil et en Afrique, a mis pour la première fois en évidence la déviation de la lumière par un astre massif (le Soleil).

Chapitre 1S.i : Généralités sur les signaux physiques et les ondes

Exercice N° 3 : Effet Doppler

- 1) Définir les trois termes suivants présents dans l'énoncé :

a. Onde

Une onde est la propagation spatio-temporelle réversible d'une perturbation locale de deux champs avec transport d'énergie sans transport global de matière (cf. définition 7 du cours du chapitre 1S-i).

b. (Onde) sinusoïdale

Une onde est dite sinusoïdale si le signal mesuré en tout point d'abscisse x est une fonction sinusoïdale du temps, indépendante de la position.

c. (Onde) progressive

Une onde est dite **progressive** si elle se propage spatialement au cours du temps. Les variables spatiales et temporelles sont alors couplées au sein de l'expression analytique de l'onde : elles sont liées par la célérité c (vitesse de phase) de l'onde (cf. définition 10 du cours du chapitre 1S-i).

- 2) Écrire le signal
- $s(x, t)$
- de l'onde en définissant les notations nécessaires.

En introduisant A_0 l'amplitude de l'onde (de même dimension que s) et φ_0 sa phase à l'origine (sans dimension), il vient :

$$s(x, t) = A_0 \cos \left(2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right)$$

[propagation dans le sens positif de (Ox) à la célérité c , origine des positions prise à l'origine de l'axe (Ox)]

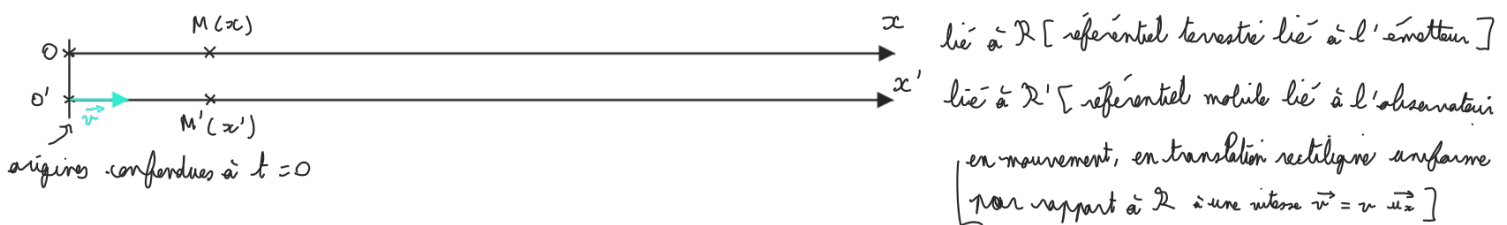
- 3) Pour l'observateur en mouvement, le point d'abscisse x est repéré par une abscisse le long d'un axe (Ox') qui lui est lié telle que $x' = x - vt$ [origine des axes (Ox) et (Ox') confondues à $t = 0$ s]. **Exprimer** l'évolution spatiale $x \mapsto s(x, t)$ du signal transporté par l'onde (à t fixé) en fonction de x' .

On utilise la relation $x = x' + vt$ dans l'évolution spatiale $x \mapsto s(x, t)$ du signal transporté par l'onde (à t fixé) obtenu à la question précédente :

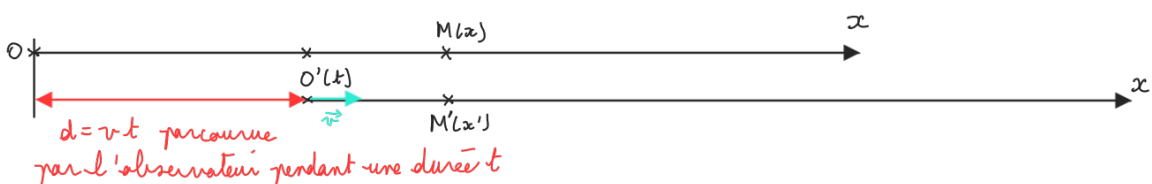
$$s(x, t) = s(x' + vt, t) = A_0 \cos \left(2\pi f \left(t - \frac{x' + vt}{c} \right) + \varphi_0 \right) = A_0 \cos \left(2\pi f \left(1 - \frac{v}{c} \right) t - 2\pi f \frac{x'}{c} + \varphi_0 \right) = s'(x', t)$$

Explication de la transformation de Galilée $x' = x - vt$:

▷ À $t = 0$:



▷ À t



$$x = \overline{OM} = \overline{OO'(t)} + \overline{O'M} = \overline{OO'(t)} + \overline{O'M'} = vt + x' \quad \text{donc} \quad \boxed{x' = x - vt}$$

- 4) En **déduire** l'expression de la fréquence f' pour l'observateur en mouvement. **Comparer** f' et f en fonction du signe de v .

À x' fixé, $t \mapsto s'(x', t)$ est une fonction périodique de pulsation temporelle $\omega' = 2\pi f'$, où : $f' = f \left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

Ainsi, du point de l'observateur (dans le référentiel où le solide de référence est l'observateur), l'onde a une fréquence : $f' = f \left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

La fréquence perçue par l'observateur est modifiée par son mouvement : c'est l'**effet Doppler**.

D'après la relation obtenue, si $v > 0$, il vient $f' < f$: si l'observateur se déplace dans le sens de propagation de l'onde, alors il perçoit une fréquence plus petite (la période temporelle perçue T' s'allonge).

Inversement, si $v < 0$, il vient $f' > f$: si l'observateur se déplace en sens inverse de la propagation, alors il perçoit alors une fréquence plus grande (la période temporelle perçue T' diminue).

Remarque : L'expression de l'onde montre aussi que la longueur d'onde mesurée par l'observateur est : $\lambda' = \frac{c}{f'} = \lambda$. On peut en déduire la vitesse de propagation de l'onde du point de vue de l'observateur : $c' = \lambda' f' = c - v$. Cette formule correspond à la cinématique classique.

- 5) Vous marchez dans la rue et un camion de pompier, sirène en marche, arrive de derrière et vous dépasse. **Décrivez** votre sensation auditive. **Justifier**.

L'onde (tridirectionnelle et supposée unidimensionnelle) est émise par le camion, qui est en mouvement. Le référentiel dans lequel l'onde est émise est donc le référentiel lié au camion.

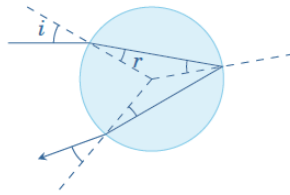
Quand le camion des pompiers est derrière, il se rapproche de l'observateur ; du point de vue du camion, c'est comme si c'était l'observateur qui se rapprochait de lui, allant donc dans le sens inverse de propagation de l'onde. Dans le référentiel terrestre lié à l'observateur, il perçoit une fréquence plus élevée et donc un son plus aigu.

Cependant, une fois que le camion a dépassé l'observateur, il s'éloigne de lui ; du point de vue du camion, c'est comme si c'était l'observateur qui s'éloignait de lui, allant donc à présent dans le sens de propagation de l'onde tridirectionnelle émise par le camion. Dans le référentiel terrestre lié à l'observateur, il perçoit une fréquence plus basse et donc un son plus grave.

Chapitre 1S.ii : De la dualité onde particule de la lumière

Exercice N° 4 : Le phénomène d'arc-en-ciel

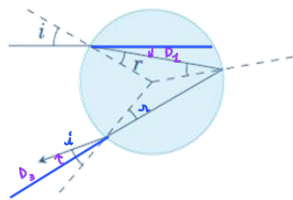
1. Le rayon entre avec un angle r défini par $\sin i = n \sin r$. Par construction, les normales passent toutes par le centre de la goutte de sorte que l'angle d'incidence à l'intérieur de la goutte vaut r . Or cet angle est inférieur à l'angle limite sinon l'angle i ne serait pas défini. Il n'y a donc pas de réflexion totale!



2. L'angle i'_N vérifie la relation de Snell-Descartes $\sin i'_N = n \sin r = \sin i$ d'où $i'_N = i$.
3. Lors de la première réfraction le rayon est dévié d'un angle $i - r$. Idem lors de la sortie. À chaque réflexion, le rayon subit une déviation égale à $\pi - 2r$. Ainsi lorsque le rayon sort de la goutte après N réflexions internes, il est dévié de la direction incidente d'un angle

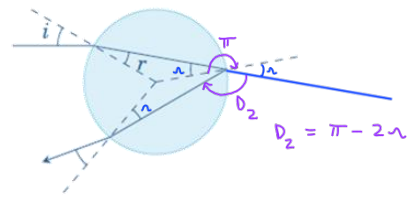
$$D_N = 2(i - r) + N(\pi - 2r)$$

Déviations non orientées : sens dicté



$$D_1 = i - r$$

$$D_3 = i - r$$



$$\text{Donc } D_N = D_1 + N \times D_2 + D_3 = 2(i - r) + N(\pi - 2r)$$

4. L'angle $D_N(i)$ passe par un minimum quand $dD_N/di = 0$ soit

$$\frac{dD_N}{di} = 2 - 2r'(i) - 2Nr'(i) = 0$$

La dérivée $r'(i)$ s'obtient à partir de la relation de Snell-Descartes

$$\sin i = n \sin r \quad \text{donc} \quad \cos i = n r'(i) \cos r$$

On obtient

$$\frac{dD_N}{di} = 2 - 2(N+1) \frac{\cos i}{n \cos r} = 0$$

Utilisons l'identité $\sin^2 + \cos^2 = 1$ pour exprimer cette dérivée en fonction uniquement de i :

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} = \frac{\cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i / n^2}} = \frac{n \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{n \cos i}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i}}$$

Finalement le minimum est obtenu quand

$$2 - 2(N+1) \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i}} = 0 \quad \text{soit} \quad \cos^2 i_N^m = \frac{n^2 - 1}{(1+N)^2 - 1}$$

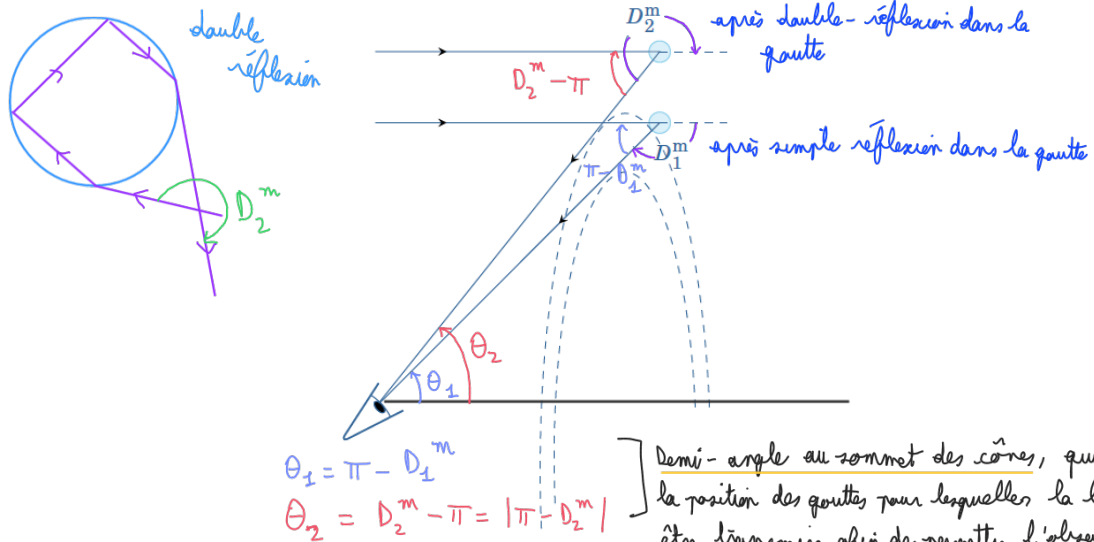
5. Pour $N = 1$ on a

$$\cos^2 i_1^m = \frac{n^2 - 1}{3} \quad \Rightarrow \quad i_1^m = 59,6^\circ \quad r_1^m = 40,4^\circ \quad D_1^m = 137,5^\circ$$

Pour $N = 2$ on a

$$\cos^2 i_2^m = \frac{n^2 - 1}{8} \quad \Rightarrow \quad i_2^m = 71,9^\circ \quad r_2^m = 45,6^\circ \quad D_2^m = 230,1^\circ$$

6. L'observateur doit être placé entre le soleil et les gouttes d'eau. Les gouttes qui envoient les rayons en direction de l'observateur avec un angle de déviation D_N^m sont situées sur un cône de sommet O, d'axe la direction des rayons incidents et d'angle au sommet $2(\pi - D_N^m)$. L'observateur voit donc un arc lumineux à une hauteur qui dépend de N . On parle d'arc d'ordre N .



7. À chaque réflexion interne, c'est environ $(n-1)^2/(n+1)^2 \sim 2\%$ de la lumière qui est réfléchie. 98% est perdu par réflexion-réfraction. On comprend dès lors que l'intensité du phénomène décroît vite avec N . C'est la raison pour laquelle on ne voit en général que les arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2.

N.B. : La relation littérale donnant ce coefficient de réflexion pourrait être obtenu dans le cadre d'un cours de physique ondulatoire et est seulement utilisé ici à but illustratif.

Pour ceux qui veulent aller plus loin [questions 8. à 12. de cet exercice facultatives] :

8. Pour la radiation rouge on a les résultats suivants :

$$\cos^2 i_1^m = \frac{n_r^2 - 1}{3} \quad \Rightarrow \quad i_1^m = 59,47^\circ \quad r_1^m = 40,29^\circ \quad D_1^m = 137,78^\circ$$

Pour la radiation bleue :

$$\cos^2 i_1^m = \frac{n_b^2 - 1}{3} \quad \Rightarrow \quad i_1^m = 58,71^\circ \quad r_1^m = 39,45^\circ \quad D_1^m = 139,64^\circ$$

9. L'angle $\pi - D_1^m$ est plus grand pour la radiation rouge ce qui signifie que l'arc rouge se trouve au dessus de l'arc bleu dans l'arc-en-ciel d'ordre 1. Entre ces deux arcs, on voit apparaître les différentes couleurs du spectre visible.

10. Pour la radiation rouge on a les résultats suivants :

$$\cos^2 i_2^m = \frac{n_r^2 - 1}{8} \quad \Rightarrow \quad i_2^m = 71,87^\circ \quad r_2^m = 45,52^\circ \quad D_2^m = 230,63^\circ$$

Pour la radiation bleue :

$$\cos^2 i_2^m = \frac{n_b^2 - 1}{8} \quad \Rightarrow \quad i_2^m = 71,46^\circ \quad r_2^m = 44,82^\circ \quad D_2^m = 233,99^\circ$$

11. L'angle $|\pi - D_2^m|$ est plus grand pour la radiation bleue. C'est pourquoi, dans l'arc-en-ciel d'ordre deux, le bleu est au dessus du rouge. Les couleurs sont donc un ordre inverse de celui de l'arc-en-ciel d'ordre un.
12. L'épaisseur angulaire de l'arc-en-ciel d'ordre 1 vaut $139,64 - 137,78 = 1,86^\circ$ alors que celui de l'arc-en-ciel d'ordre 2 vaut $3,36^\circ$. L'arc-en-ciel d'ordre deux est plus épais que celui d'ordre un.

Fin du corrigé du DM