

Correction travail de groupes 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages. Il s'agit de faire la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
Une pyramide de 4 étages est donc composée de 30 boules
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

$$S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 30 + u_5 = 30 + 5^2 = 55$$

Une pyramide de 5 étages est donc composée de 55 boules

- b. On considère la fonction *pyramide* ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'instruction *pyramide*(n) renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :  
    S = 0  
    for i in range(1, n+1) :  
        S = S + i**2  
    return S
```

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{D'une part : } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part : } (n+2)[2(n+1)+1] = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

$$\text{Donc : } \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\text{On a donc bien pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

- d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P(n)$: « $u_n > 0$ » la proposition au rang n

- Initialisation : pour $n = 1$ on a d'une part $S_1 = u_1 = 1$
Et d'autre part $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$). On veut montrer qu'alors $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$).

Par définition $S_{k+1} = u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1} = S_k + u_{k+1}$

donc d'après l'hypothèse de récurrence $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

donc d'après la question précédente : $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie si $P(k)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et P est héréditaire donc pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie. Donc

pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Il s'agit de trouver le plus grand entier naturel n non nul tel que $S_n \leq 200$.

La suite (S_n) est croissante.

De plus, pour $n = 7$, $S_7 = \frac{7 \times (7+1) \times (2 \times 7 + 1)}{6} = 140 < 200$

et pour $n = 8$, $S_8 = \frac{8 \times (8+1) \times (2 \times 8 + 1)}{6} = 204 > 200$

Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire la plus grande pyramide possible. Cette pyramide aura 7 étages.