

Exercices type bac - Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (extrait du sujet Asie J1 septembre 2025, ex 2)

« Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :

- le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).
- le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.
- l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle ».

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[BG]$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J .

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ) .

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(0; -1; 1)$ est normal au plan (ABG) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG) .

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ est :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G .

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B .

5. a. Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

Exercice 2 (extrait du sujet Métropole J1 septembre 2025, ex 2)

On considère le cube $ABCDEFGH$. On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

2. a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH) , que l'on nommera N , a pour coordonnées $(0; 2; 2)$.

3. a. Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A .

b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face $BCGF$.

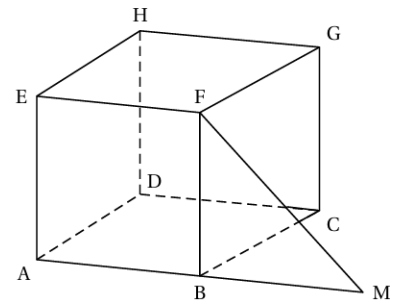
a. Déterminer les coordonnées du point J .

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN) .

c. Montrer que J appartient au plan (AMN) . En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN) .

5. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, B étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre $AMNF$ est le double du volume de la pyramide $BCGFM$.



Exercice 3 (extrait du sujet Métropole J2 juin 2025, ex 2)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par : $d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$;
- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par : $d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Partie A

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
- a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 2y + 4z - 7 = 0$.
- Démontrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.
- a. Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .
b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k \overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
- Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Exercice 4 (extrait du sujet Asie J1 juin 2025, ex 1)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(\alpha; 3; \alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α , les points A , B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135° .

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1; 2; 2)$.

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω .

Exercice 5 (extrait du sujet Amérique du sud J1 novembre 2025, ex 4)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$ et $K(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0)$

- Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t . Établir que $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.
- Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = OM(t)$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.
- En déduire que le point $H(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4})$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) .
- Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre du triangle ABC .
- a. Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .
b. En déduire une équation du plan (ABC) .
- Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC .

