

Corrigé du devoir maison 1

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n - 1$.

1. Calculons les trois premiers termes de la suite (v_n) :

$$v_0 = 3 \quad v_1 = v_0 + 2 \times 0 - 1 = 3 - 1 = 2 \quad v_2 = v_1 + 2 \times 1 - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ donc (v_n) n'est pas arithmétique ; $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$ donc (v_n) n'est pas géométrique

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n : $w_n = v_n - n^2$.

$$2. \text{ a. } w_0 = v_0 - 0^2 = 3 \quad w_1 = v_1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \quad w_2 = v_2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (v_{n+1} - (n+1)^2) - (v_n - n^2) \\ &= (v_n + 2n - 1 - (n^2 + 2n + 1)) - v_n + n^2 \\ &= v_n + 2n - 1 - n^2 - 2n - 1 - v_n + n^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n on a : $w_{n+1} - w_n = -2$

On en déduit que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $w_0 = 3$.

c. Ainsi, pour tout entier naturel n : $w_n = w_0 + r \times n = 3 - 2n$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $v_n = w_n + n^2 = n^2 - 2n + 3$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$: S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite arithmétique (w_n)

Rappel : La somme de successifs d'une suite arithmétique est donnée par : $(nb \text{ de termes}) \times \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

donc :

$$S_n = (n+1) \times \frac{w_0 + w_n}{2} = (n+1) \times \frac{3 + 3 - 2n}{2} = (n+1) \times \frac{6 - 2n}{2} = (n+1)(3 - n)$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$: on note $S'_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

$$\text{Si } n = 0 : S'_n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0 \quad \text{donc } S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ si } n = 0$$

$$\text{Si } n = 1 : S'_n = 0^2 + 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{donc } S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ si } n = 1$$

$$\text{Si } n = 2 : S'_n = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6} = \frac{6 \times 5}{6} = 5 \quad \text{donc } S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ si } n = 2$$

Ainsi, l'égalité est vraie pour $n \in \{0; 1; 2\}$.

Remarque : Vous avez démontré dans le travail de groupes du mardi 16/09, par récurrence, que cette égalité est vraie pour tout entier naturel n .

b. Pour tout entier naturel n on a : $w_n = v_n - n^2$ donc $v_n = w_n + n^2$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} : v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = w_0 + 0^2 + w_1 + 1^2 + w_2 + 2^2 + \dots + w_n + n^2$$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_n + 0^2 + 1^2 + \dots + n^2$$

$$= S_n + S'_n$$

$$= (n+1)(3 - n) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= (n+1) \left(3 - n + \frac{n(2n+1)}{6} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{18 - 6n + 2n^2 + n}{6} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{2n^2 - 5n + 18}{6} \right)$$