

Correction de l'exercice 3 de la feuille exos bac 2025-2026
exercice 2 du sujet Métropole J1 juin 2025

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-contre :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.

Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, c'est-à-dire le coefficient directeur de T_A donc :

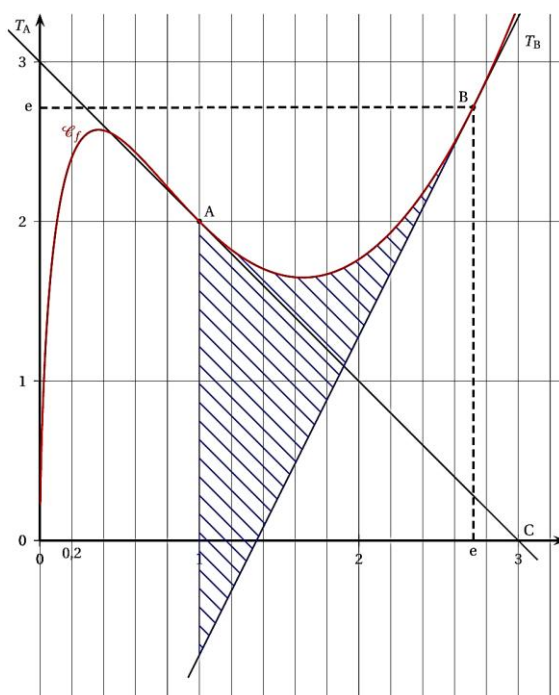
$$f'(1) = \frac{3 - 2}{0 - 1} = -1$$

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?

La courbe $\mathcal{C}_f$ semble avoir exactement deux tangentes horizontales sur $]0; 3]$, donc l'équation $f'(x) = 0$ semble avoir deux solutions sur $]0; 3]$.

3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

La courbe semble être en-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $]0; 0,4]$ donc il semble que f soit concave sur cet intervalle. Or $0,2 \in]0; 0,4]$ donc $f''(0,2) < 0$.



Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

• $2X^2 - 3X + 2 = 0$ est un trinôme avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 2$.
 $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times 2 < 0$ donc l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a aucune solution réelle.

$$\bullet M(x; y) \in \mathcal{C}_f \cap (O_x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, pour tout } x \in]0; +\infty[: f(x) = 0 &\Leftrightarrow x[2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \text{ car } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 2 = 0 \text{ en posant } X = \ln(x) \end{aligned}$$

Or l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a aucune solution réelle donc l'équation $f(x) = 0$ non plus et donc $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

$$\text{Pour tout } x \in]1; +\infty[\quad f(x) = x[2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2] = x \ln(x) \left[2\ln(x) - 3 + \frac{2}{\ln(x)} \right] \quad (\ln(x) \neq 0 \text{ ar } x > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{donc, par limite de produit,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty.$$

$$\text{On a aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln(x) = +\infty \text{ et, par limite de quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0$$

$$\text{donc, par limite de somme ; } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln(x) - 3 + \frac{2}{\ln(x)} = +\infty.$$

$$\text{Ainsi, par limite de produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) \left[2\ln(x) - 3 + \frac{2}{\ln(x)} \right] = \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln(x) + 1)$.

Il est admis au début de l'énoncé que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f' est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 $f' = 2u^2 + u - 1$ où u est la fonction $\ln$ donc $f'' = 2 \times 2u'u + u' = 4u'u + u' = u'(4u + 1)$.

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ on a donc : $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln(x) + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4 \ln(x) + 1$ sur $]0; +\infty[$.

Soit $x \in]0; +\infty[: 4 \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{4}}$ par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$

Et $4 \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{4}}$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion sur $]0; +\infty[$ d'abscisse $e^{-\frac{1}{4}}$.

De plus, la fonction f est convexe sur $]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$ et concave sur $]0; e^{-\frac{1}{4}}[$.

c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Le point B a pour abscisse e et $e \in]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$. Or f est convexe sur $]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente T_B sur $]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$, donc aussi sur $]1; +\infty[$ (puisque $1 > e^{-\frac{1}{4}}$).

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$T_B: y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$f'(e) = 2(\ln(e))^2 + \ln(e) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$ et $f(e) = e[2(\ln(e))^2 - 3 \ln(e) + 2] = e$

Donc $T_B: y = 2(x - e) + e$

Donc $T_B: y = 2x - e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2+1}{4}$.

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \int_1^e u'(x)v(x) dx$$

En posant $u'(x) = x$ $u(x) = \frac{1}{2}x^2$
 $v(x) = \ln(x)$ $v'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [1; e]$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; e]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1; e]$ donc, d'après la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_1^e x \ln(x) dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dx$$

Donc :

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{1}{2}e^2 \ln(e) - 0 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_B , et les droites d'équation

$x = 1$ et $x = e$. On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

On a montré que la droite T_B est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$, donc sur $[1; e]$ donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - (2x - e)) dx = \int_1^e (x[2(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 2] - 2x + e) dx = \int_1^e (2x(\ln(x))^2 - 3x \ln(x) + e) dx$$

On a donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = 2 \int_1^e x (\ln(x))^2 dx - 3 \int_1^e x \ln(x) dx + \int_1^e e dx = 2 \times \frac{e^2-1}{4} - 3 \times \frac{e^2+1}{4} + e(e-1) = \frac{-e^2-5}{4} + e^2 - e = \frac{3e^2-4e-5}{4} \text{ u. a}$$