

Exercices bac : fonctions, suites et intégrales

Exercice 1 (d'après sujet Métropole septembre 2015, ex 2)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe, à rendre avec la copie (voir en bas de l'énoncé).

Partie A Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^n xe^{-x} dx$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B On considère l'algorithme suivant dans lequel K est un entier naturel non nul choisi par l'utilisateur.

```

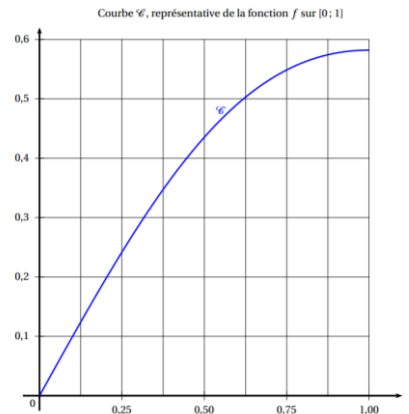
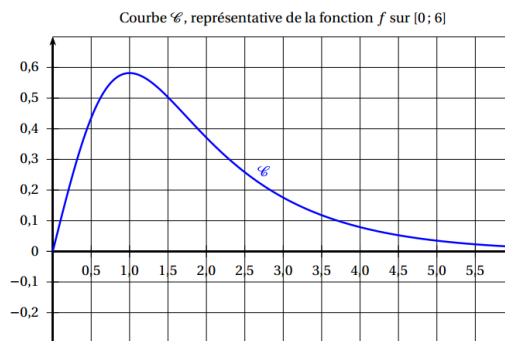
A ← 0
x ← 0
h ← 1/K
for i in range(K):
    A ← A + h × f(x)
    x ← x + h
Print(A)
    
```

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $K = 4$, en détaillant les valeurs contenues dans chacune des variables A , x et i à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs successives de A seront arrondies au millièm.

2. En l'illustrant sur l'annexe à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique de la valeur affichée dans la console A pour $K = 8$.

3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

ANNEXE Exercice 2
À rendre avec la copie



Exercice 2 (exercice 3 du sujet Polynésie J1 juin 2025)

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad , \text{ pour tout } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-contre.

2. Justifier par le calcul que le point $A(1; e^{-1})$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

Partie B : Étude des intégrales

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0; 1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. Sur le graphique ci-contre, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.

a. Donner une interprétation graphique de I_n .

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0 .

3. a. Soit n un entier naturel.

Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

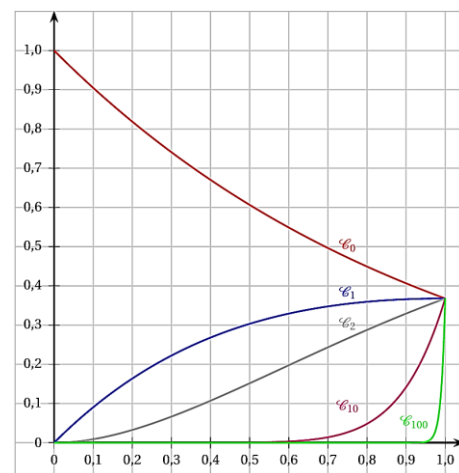
b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.

6. a. Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

b. En déduire que $\ell = 0$.



On donne ci-dessous le script de la fonction *mystere*, écrite en langage Python. On a importé la constante e .

7. Que renvoie *mystere*(100) dans le contexte de l'exercice ?

```
def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

Exercice 3 (exercice 2 du sujet Métropole J1 juin 2025)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-contre :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.

Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?

3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

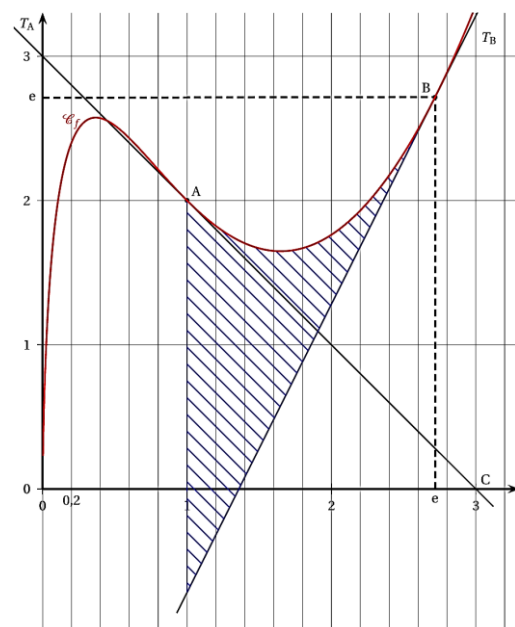
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln(x) + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1; +\infty[$.



Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2+1}{4}$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_B , et les droites d'équation

$x = 1$ et $x = e$. On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.