

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1; 1; -4), \quad B(2; -1; -3), \quad C(0; -1; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1; 1; 2).$$

1. Démontrer que les points A, B, et C définissent un plan.
2.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
 - b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.
3.
 - a. Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).
 - b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega H = 2\sqrt{3}$.

On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S .

On dit qu'un plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $K \in \mathcal{P} \cap S$
- $(\Omega K) \perp \mathcal{P}$

5. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées $K(3; 3; 0)$.

Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S au point K .