

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.

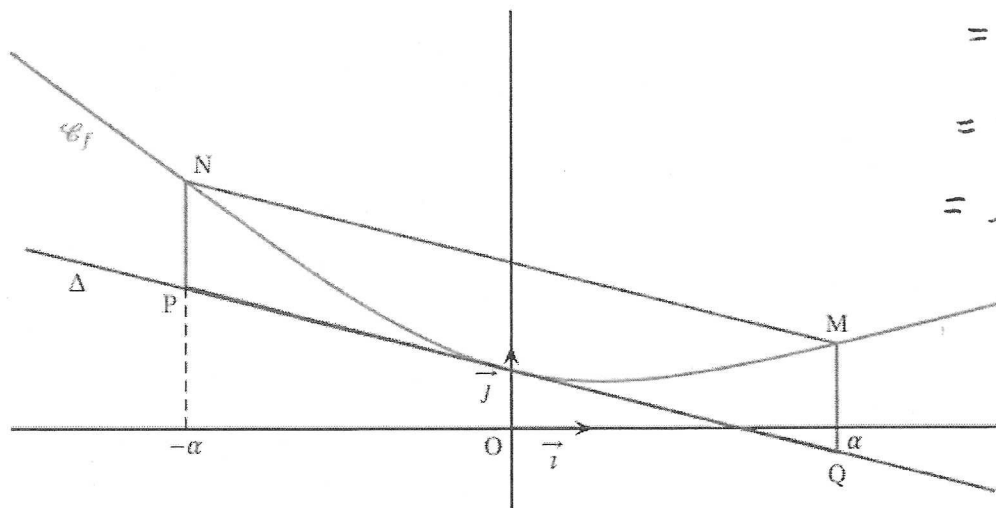
Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1.
 - a. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - b. En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2.
 - a. Montrer que $f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha$.
 - b. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

$$\ln(1+e^x) + \frac{1}{4}x$$

$$\ln(1+e^x) - \frac{1}{4}x$$

$$-f(x) = -\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{4}x$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1+e^x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e^x(e^x+1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= \ln(e^x) - \ln(e^x+1)$$

$$= x - \ln(e^x+1) - \frac{1}{4}x$$

$$= -\ln(e^x+1) + \frac{3}{4}x$$

$$f(-\alpha) = \ln(1+e^\alpha) + \frac{1}{4}(-\alpha)$$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \frac{\alpha}{4}$$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \alpha + \frac{3}{4}\alpha$$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln(e^\alpha) + \frac{3}{4}\alpha$$

$$= \ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right) + \frac{3}{4}\alpha$$

$$= \ln\left(\frac{e^\alpha(e^{-\alpha}+1)}{e^\alpha}\right) + \frac{3}{4}\alpha$$

$$= \ln(e^{-\alpha}+1) + \frac{3}{4}\alpha$$