

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 14 mars à 8h30

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+t^2)y' + 2ty = t^2 \quad (E)$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y = e^{2t}$$

① (E) $\Rightarrow y' + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{=\alpha(t)} y = \underbrace{\frac{t^2}{1+t^2}}_{=\beta(t)}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$y_h(t) = C e^{-A(t)} \quad \text{où } A(t) = \int \frac{2t}{1+t^2} dt$$
$$= \frac{C}{1+t^2} \quad = \ln(1+t^2)$$

$$y_p(t) = \frac{C(t)}{1+t^2}$$

$$\text{où } C(t) = \int e^{A(t)} \beta(t) dt$$
$$= \int (1+t^2) \times \frac{t^2}{1+t^2} dt$$
$$= \int t^2 dt = t^3/3$$
$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{3} \frac{t^3}{1+t^2}$$

La solution générale de (E) est

$$y(t) = \frac{C}{1+t^2} + \frac{1}{3} \times \frac{t^3}{1+t^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Exo2 : Le (PC) est $r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$

Les racines du (PC) sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$.

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

$$f(t) = e^{2t} = P(t)e^{rt} \text{ où } P(t) = 1 \text{ et } r = 2.$$

$r = 2 = r_1$ est une racine simple du (PC)

$$\Rightarrow y_p(t) = tQ(t)e^{rt} \text{ avec } \deg Q = \deg P = 0$$
$$= Ate^{2t} \quad \Rightarrow Q(t) = A$$

$$y_p'(t) = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$$

$$y_p''(t) = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$$
$$= 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$$

$$\Rightarrow y_p'' - 4y_p = e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow 4Ae^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{4}te^{2t}$$

La solution générale est $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 10h45

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$ty' + 2y = e^t \quad (E)$$

Exercice 2 : Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + (m+1)y' + my = 0$$

① Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(E) \Rightarrow y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{=\alpha(t)} y = \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{=\beta(t)}$

$$y_h(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{où } A(t) = \int \alpha(t) dt = 2 \ln(t)$$
$$= \frac{c}{t^2} \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$y_p(t) = \frac{c(t)}{t^2} \quad \text{où } c(t) = \int e^{A(t)} \beta(t) dt$$
$$= \int t^2 \times \frac{e^t}{t} dt$$

$$u=t, u'=1$$
$$v'=e^t, v=e^t$$

$$= \int t e^t$$
$$= t e^t - e^t$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{t e^t - e^t}{t^2}$$

La solution générale est $y = \frac{c}{t^2} + \frac{e^t(t-1)}{t^2}$ où $c \in \mathbb{R}$.

② Le (PC) est $r^2 + (m+1)r + m$. On a

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m \\ = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

Si $m=1$, alors $\Delta=0$

Si $m \neq 1$, alors $\Delta > 0$.

$m=1$: Le (PC) possède une racine double

$$r_0 = -\frac{(m+1)}{2} = -1$$

$$\Rightarrow y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$m \neq 1$ Le (P.C.) possède 2 racines réelles distinctes

$$r_1 = -\frac{(m+1) - (m-1)}{2} = -\frac{2m}{2} = -m$$

et

$$r_2 = -\frac{(m+1) + m - 1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{-mt} + C_2 e^{-t} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 17 mars à 15h15

Exercice 1 : Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle suivante :

$$\cos(t) y' + \sin(t) y = 1 \quad (E)$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$

①

Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{\sin t}{\cos t} y = \frac{1}{\cos t}$

$\alpha(t) \qquad \beta(t)$

$$y_h(t) = C e^{-A(t)} \quad \text{où} \quad A(t) = \int \alpha(t) dt$$
$$= \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$
$$= - \int \frac{-\sin t}{\cos t} dt$$
$$= - \ln(\cos t)$$

$$\Rightarrow y_h(t) = C e^{\ln(\cos t)}$$
$$= C \times \cos(t) \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}.$$

$y_p(t) = \sin t$ est sol. particulière de (E) en effet

$$\cos t y_p' + \sin t y_p = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

La solution générale est

$$y(t) = C \cos t + \sin t \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}.$$

② Le (PC) est $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$. Les racines du (PC) sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = e^{-t} = P(t)e^{rt} \text{ où } P(t) = 1 \text{ et } r = -1.$$

$r = -1 = r_1$ est une racine simple du (PC)

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p(t) &= tQ(t)e^{rt} \text{ avec } \deg Q = \deg P = 0 \\ &= Ate^{-t} \quad \Rightarrow Q(t) = A \end{aligned}$$

$$y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

$$y_p''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

$$\Rightarrow y_p'' + 5y_p' + 4y_p = e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow -2Ae^{-t} + Ate^{-t} + 5Ae^{-t} - 5Ate^{-t} + 4Ae^{-t} = e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow 3Ae^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1/3$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{3}te^{-t}$$

$$\text{La solution générale est } y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$

Analyse 2 et Algèbre 2
Groupe 04

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 10h45

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$ty' + 2y = e^t$$

Exercice 2 : Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + (m + 1)y' + my = 0$$

Voir Groupe 02

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 8h30

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$ty' - y = e^{\frac{1}{t}} \quad (E)$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = te^{2t} ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = Ate^{2t}$
- b) $y_p(t) = At^2e^{2t}$
- c) $y_p(t) = (At + B)e^{2t}$
- d) $y_p(t) = t(At + B)e^{2t}$
- e) Aucune de ces propositions.

$$\textcircled{1} \text{ Soit } t \in \mathbb{R}_+^*, (E) \Leftrightarrow \underbrace{y' - \frac{1}{t}y}_{=\alpha(t)} = \underbrace{\frac{1}{t}e^{1/t}}_{=\beta(t)}$$

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{où } A(t) = \int \alpha(t) dt = -\ln(t) \\ = Ce^{\ln(t)} = C \times t \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

$$y_p(t) = C(t) \times t \quad \text{où } C(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt \\ = \int \frac{1}{t} e^{1/t} e^{-\ln(t)} dt \\ = \int \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt = -e^{1/t} \\ \Rightarrow y_p(t) = -te^{1/t}$$

La solution générale est $y = c_1 e^t - t e^{2t}$ où $t \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$.

② Le (PC) est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Les racines du (PC) sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

$$f(t) = t e^{2t} = P(t) e^{rt} \text{ avec } P(t) = t \text{ et } r = 2.$$

$r = 2 = r_2$ est racine simple du (PC)

$$\Rightarrow y_p(t) = t Q(t) e^{rt} \text{ avec } \deg Q = \deg P = 1$$

$$= t(At + B) e^{2t} \quad \Rightarrow Q(t) = At + B$$

Rép ①

Analyse 2 et Algèbre 2
Groupe 06

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 8h30

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$ty' - y = e^{\frac{1}{t}}$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = te^{2t} \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = Ate^{2t}$
- b) $y_p(t) = At^2e^{2t}$
- c) $y_p(t) = (At + B)e^{2t}$
- d) $y_p(t) = t(At + B)e^{2t}$
- e) Aucune de ces propositions.

Voir Groupe 05

Analyse 2 et Algèbre 2
Groupe 07

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 14 mars à 8h30

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + t^2)y' + 2ty = t^2$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y = e^{2t}$$

Voir Groupe 01

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 16 mars à 10h45

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + t^2)y' + 4ty = 1 \quad (E)$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3t} + te^{-t} \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = Ae^{3t} + (Bt + C)e^{-t}$
- b) $y_p(t) = Ate^{3t} + (Bt + C)e^{-t}$
- c) $y_p(t) = Ae^{3t} + Bte^{-t}$
- d) $y_p(t) = Ate^{3t} + Bte^{-t}$
- e) Aucune de ces réponses.

$$\textcircled{1} \quad (E) \Rightarrow y' + \underbrace{\frac{4t}{1+t^2}}_{=\alpha(t)} y = \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{=\beta(t)} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{où } A(t) = \int \alpha(t) dt = 2 \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ = 2 \ln(1+t^2) \\ = \frac{C}{(1+t^2)^2}$$

$$y_p(t) = \frac{C(t)}{(1+t^2)^2} \quad \text{où } C(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt \\ = \int \frac{1}{1+t^2} e^{2 \ln(1+t^2)} dt = \int \frac{1}{1+t^2} (1+t^2)^2 dt = \int (1+t^2) dt \\ = t + t^3/3$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{t+t^3/3}{(1+t^2)^2}$$

La solution générale est $y = \frac{c}{(1+t^2)^2} + \frac{t+t^3/3}{(1+t^2)^2}$
où $c \in \mathbb{R}$

② Le (PC) est $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$

Les racines du (PC) sont $r=1$ et $r=3$

$$f(t) = e^{3t} + te^{-t} = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = P(t)e^{rt} \text{ avec } P(t)=1 \text{ et } r=3.$$

$r=3=r_2$ est racine simple

$$y_{p1}(t) = tQ(t)e^{rt} \\ = Ate^{3t}$$

$$\text{avec } \deg Q = \deg P = 0 \\ \Rightarrow Q(t) = A$$

$$f_2(t) = P(t)e^{rt} \text{ avec } P(t)=t \text{ et } r=-1$$

$r=-1$ n'est pas racine du (PC)

$$\Rightarrow y_{p2}(t) = Q(t)e^{rt} \text{ avec } \deg Q = \deg P = 1$$

$$\Rightarrow Q(t) = Bt + C$$

$$= (Bt + C)e^{-t}$$

Par le principe de superposition, une solution particulière est

$$y_p(t) = y_{p1}(t) + y_{p2}(t) = Ate^{3t} + (Bt + C)e^{-t}$$

Rep: $\boxed{B}$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 14 mars à 14h

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$2t y' - y = \sqrt{t} \quad (E)$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \sin(t) \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = e^t(A \sin(t) + B \cos(t))$
- b) $y_p(t) = Ate^t \sin(t)$
- c) $y_p(t) = te^t(A \sin(t) + B \cos(t))$
- d) $y_p(t) = Ae^t \sin(t)$
- e) Aucune de ces réponses.

$$\textcircled{1} \text{ Soit } t \in \mathbb{R}_+^*, (E) \Leftrightarrow \underbrace{y' - \frac{1}{2t} y}_{=\alpha(t)} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{\beta(t)}$$

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)} \text{ où } A(t) = \int \alpha(t) dt = -\frac{1}{2} \ln(t) \\ = Ce^{\frac{1}{2} \ln(t)} = C \times \sqrt{t} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

$$y_p(t) = C(t) \times \sqrt{t} \text{ où } C(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt \\ = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ = \int \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln(t) \\ \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2} \sqrt{t} \ln(t)$$

La solution générale est $y = Cx\sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t}\ln(t)$
où $C \in \mathbb{R}$

② Le (PC) est $r^2 - 2r + 2$. On a $\Delta = -4 = (2i)^2$

Les racines du (PC) sont

$$r_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \quad \text{et} \quad r_2 = \overline{r_1} = 1+i$$

$$f(t) = e^t \sin(t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos(\beta t) + P_2(t) \sin(\beta t))$$

$$\text{où } \alpha = 1 = \beta, \quad P_1(t) = 0, \quad P_2(t) = 1$$

$\alpha + i\beta = 1+i$ est racine du (PC)

$$\Rightarrow y_p(t) = t e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t))$$

$$\text{avec } \deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\} = 0$$

$$\Rightarrow Q_1(t) = A \quad \text{et} \quad Q_2(t) = B$$

$$\Rightarrow y_p(t) = t e^t (A \cos t + B \sin t)$$

Rep IC

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 14h

Exercice 1 : Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle suivante :

$$\cos(x) y' + \sin(x) y = e^{2x} \cos^2(x) \quad (E)$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = e^t \sin(t) \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = A e^t \sin(t)$
- b) $y_p(t) = e^t (A \sin(t) + B \cos(t))$
- c) $y_p(t) = t^2 e^t (A \sin(t) + B \cos(t))$
- d) $y_p(t) = A t^2 e^t \sin(t)$
- e) Aucune de ces réponses.

$$\textcircled{1} \text{ Soit } x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, (E) \Rightarrow y' + \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{=\alpha(x)} y = \underbrace{e^{2x} \cos^2 x}_{=\beta(x)}$$

$$y_h(x) = C e^{-A(x)} \text{ où } A(x) = \int \alpha(x) dx \\ = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x)$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C e^{\ln(\cos x)} = C \times \cos(x) \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = c(x) \times \cos(x) \text{ où } c(x) = \int \beta(x) e^{A(x)} dx$$

$$= \int e^{2x} \cos x e^{-\ln(\cos x)} dx$$

$$= \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(x)$$

La solution générale est $y = Cx \cos x + \frac{1}{2}e^{2x} \cos(x)$

② Le (P_0, C_0) est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$. $r=1$ est racine double de (P_0, C_0)

$$f(t) = e^t \sin t = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos(\beta t) + P_2(t) \sin(\beta t))$$

avec $\alpha = \beta = 1$, $P_1(t) = 0$ et $P_2(t) = 1$

$\alpha + i\beta = 1 + i$ n'est pas racine de (P, C)

$$\Rightarrow y_p(t) = e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t))$$

avec $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max \{\deg P_1, \deg P_2\} = 0$

$$\Rightarrow Q_1(t) = B \text{ et } Q_2(t) = A$$

$$\Rightarrow y_p(t) = e^t (B \cos t + A \sin t)$$

Réponse: $\boxed{B}$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 14 mars à 15h15

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$xy' - 3y = x^5 \sin(x) \quad (E)$$

Exercice 2 : Déterminer la fonction $g(t)$ telle que $y(t) = e^{3t}g(t)$ soit la solution générale de l'équation différentielle :

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$$

$$\textcircled{1} \text{ Soit } x \in \mathbb{R}_+^*, (E) \Leftrightarrow \underbrace{y' - \frac{3}{x}y}_{=\alpha(x)} = \underbrace{x^4 \sin(x)}_{=\beta(x)}$$

$$y_h(x) = (e^{-A(x)}) \quad \text{où } A(x) = \int \alpha(x) dx = -3 \ln x$$
$$= ce^{3 \ln x} = c \times x^3 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = (x) \times x^3 \quad \text{où } (x) = \int \beta(x) e^{A(x)} dx$$
$$= \int x^4 \sin x e^{-3 \ln x} dx$$
$$= \int x \sin x dx$$
$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$
$$= -x \cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -x^4 \cos(x) + x^3 \sin x$$

La solution générale est

$$y(x) = cx^3 - x^4 \cos(x) + x^3 \sin(x)$$

où $c \in \mathbb{R}$

$$② \quad y(t) = e^{3t} g(t)$$

$$y'(t) = 3e^{3t} g(t) + e^{3t} g'(t)$$

$$\begin{aligned} y''(t) &= 9e^{3t} g(t) + 3e^{3t} g'(t) + 3e^{3t} g'(t) + e^{3t} g''(t) \\ &= 9e^{3t} g(t) + 6e^{3t} g'(t) + e^{3t} g''(t) \end{aligned}$$

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \cancel{9e^{3t} g} + \cancel{6e^{3t} g'} + e^{3t} g'' - \cancel{18e^{3t} g} - \cancel{6e^{3t} g'} \\ & + \cancel{9e^{3t} g} = t^2 e^{3t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{3t} g'' = t^2 e^{3t}$$

$$\Rightarrow g'' = t^2 \Rightarrow g' = \frac{t^3}{3} + \alpha$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{t^4}{12} + \alpha t + \beta$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(t) = e^{3t} \left(\frac{t^4}{12} + \alpha t + \beta \right)$$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 16h15

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + \left(2t - \frac{1}{t}\right)y = t^2$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' = 1$$

① Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ $\alpha(t) = 2t - \frac{1}{t}$ et $\beta(t) = t^2$

$$y_h(t) = C e^{-A(t)} \text{ où } A(t) = \int \alpha(t) dt = t^2 - \ln(t) \\ = C e^{+\ln(t) - t^2} = C t e^{-t^2}$$

$$y_p(t) = c(t) t e^{-t^2} \text{ où } c(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt \\ = \int t^2 e^{t^2 - \ln(t)} dt \\ = \int t e^{t^2} dt \\ = \frac{1}{2} \int 2t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2} e^{t^2} t e^{-t^2} = \frac{1}{2} t$$

La solution générale est $y = C t e^{-t^2} + \frac{1}{2} t$ où $C \in \mathbb{R}$.

② Le (PC) est $r^2 + r = r(r+1)$. Les racines du (PC) sont $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$.

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 + C_2 e^{-t} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$y_p(t) = t$ est une sol. particulière.

En effet, $y_p'(t) = 1$ et $y_p''(t) = 0$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p' = 1$$

La solution générale est

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + t$$

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 16 mars à 10h45

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + t^2)y' + 4ty = 1$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3t} + te^{-t} \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = Ae^{3t} + (Bt + C)e^{-t}$
- b) $y_p(t) = Ate^{3t} + (Bt + C)e^{-t}$
- c) $y_p(t) = Ae^{3t} + Bte^{-t}$
- d) $y_p(t) = Ate^{3t} + Bte^{-t}$
- e) Aucune de ces réponses.

Voir Groupe 08

Analyse 2 et Algèbre 2
Groupe 14

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 13 mars à 14h

Exercice 1 : Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle suivante :

$$\cos(x) y' + \sin(x) y = e^{2x} \cos^2(x)$$

Exercice 2 : Parmi les propositions suivantes, laquelle donne une forme pour la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = e^t \sin(t) \quad ?$$

Justifier.

- a) $y_p(t) = A e^t \sin(t)$
- b) $y_p(t) = e^t (A \sin(t) + B \cos(t))$
- c) $y_p(t) = t^2 e^t (A \sin(t) + B \cos(t))$
- d) $y_p(t) = A t^2 e^t \sin(t)$
- e) Aucune de ces réponses.

Voir Groupe 10

Interrogation 1
Durée : 30 minutes

Le 14 mars à 13h

Exercice 1 : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$ty' + y = t \ln(t) \quad (E)$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = \sin(2t)$$

① Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(E) \Leftrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{t}}_{\alpha(t)} y = \underbrace{\ln(t)}_{\beta(t)}$

$$y_R(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{où} \quad A(t) = \int \alpha(t) dt = \ln(t) \\ = \frac{C}{t} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y_p(t) = \frac{C(t)}{t} \quad \text{où} \quad C(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt \\ = \int \ln(t) e^{\ln(t)} dt$$

$$\begin{aligned} u = \ln t \quad u' = \frac{1}{t} &= \int t \ln(t) dt \\ v' = t \quad v = \frac{t^2}{2} &\rightarrow = \frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{t}{2} \ln(t) - \frac{t}{4}$$

La solution générale est $y = \frac{C}{t} + \frac{t}{2} \ln(t) - \frac{t}{4}$

② Le PC est $r^2 + 1 = (r+i)(r-i)$

Les racines du PC sont

$$r_1 = -i = \alpha - i\beta \text{ et } r_2 = \overline{r_1}$$

avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

$$\Rightarrow y_h(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

$$= C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = \sin(2t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos(\beta t) + P_2(t) \sin(\beta t))$$

avec $\alpha = 0, \beta = 2, P_1(t) = 0, P_2(t) = 1$

$\alpha + i\beta = 2i$ n'est pas racine du PC

$$\Rightarrow y_p(t) = e^{\alpha t} (Q_1 \cos(\beta t) + Q_2 \sin(\beta t))$$

avec $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\} = 0$

$$\Rightarrow y_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

$$y_p'(t) = -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t)$$

$$y_p''(t) = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$$

$$y_p'' + y_p = -3A \cos(2t) - 3B \sin(2t) = \sin(2t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1/3 \end{cases} \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{3} \sin(2t)$$

La sol. générale $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3} \sin(2t)$