

Exercice 1.

Théorème de Wilson : Un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1(p)$.

L'exercice propose de vérifier cette égalité pour le cas du nombre premier 47.

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$.

1. On considère l'équation (E) $23x + 47y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E).
 - b. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de (E).
 - c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que : $23x \equiv 1(47)$.
2. Soit a et b deux entiers relatifs.
 - a. Montrer que si $ab \equiv 0(47)$, alors $a \equiv 0(47)$ ou $b \equiv 0(47)$.
 - b. En déduire que si $a^2 \equiv 1(47)$, alors $a \equiv 1(47)$ ou $a \equiv -1(47)$.
- 3.

- a. Montrer que pour tout entier p de A , il existe un entier relatif q tel que : $pq \equiv 1(47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A , il existe un unique entier, noté $\text{inv}(p)$, appartenant à A tel que $p \times \text{inv}(p) \equiv 1(47)$.

Par exemple $\text{inv}(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1(47)$, $\text{inv}(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1(47)$...

- b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = \text{inv}(p)$?
- c. Montrer que $46! \equiv -1(47)$, où $46! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 45 \times 46$.

Exercice 2.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
 - a. Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
 - b. Faire une figure (Soignée) et placer les points A et B .
 - c. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$.
3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
 - a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que $OAFB$ est un losange.
 - b. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OF})$ puis de l'angle $(\vec{u}, \vec{OF})$.
 - c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
 - d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

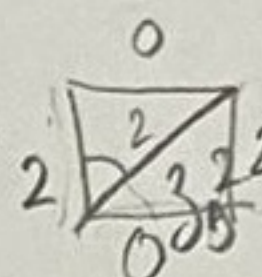
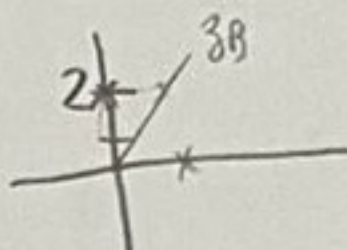
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

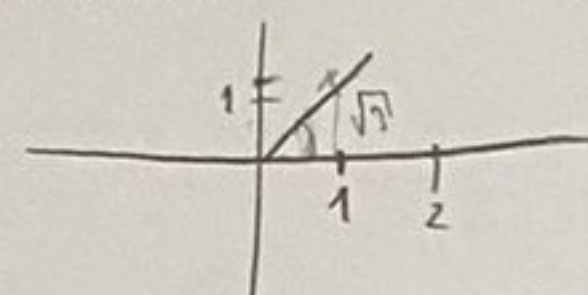
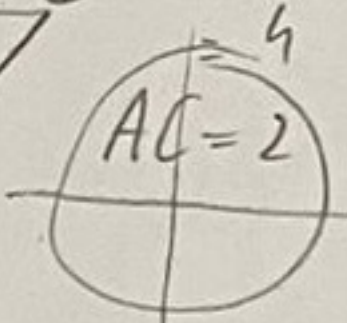
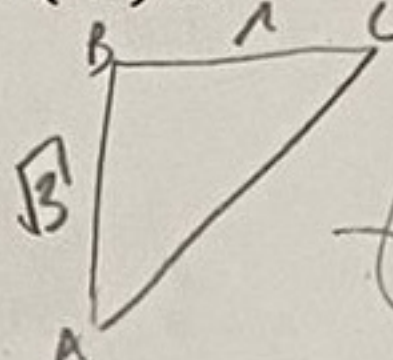
Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

$$\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$



$$2^2 = 2^2 + 0^2 = 4 = 2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3 + 1 = 4$$



$$z = |z|(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

