

Bac blanc n°1 de Mathématiques Tle spécialité Mathématiques
--

Année scolaire 2024-2025

Sujet 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte cinq pages, numérotées de 1 à 5. Il est composé de quatre exercices, que le candidat pourra traiter dans l'ordre de son choix.

Le sujet est à rendre avec la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction.

Le barème, sur 20 points, est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de **100 000** insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser **400 000**.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de **60%** chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner l'expression de u_n en fonction de n .
2. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et,} \quad \text{pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
 - a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. On remarque que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
 - b. Montrer que la suite (v_n) est convergente. On note ℓ la limite de la suite (v_n) .
 - c. Justifier que $f(\ell) = \ell$ et en déduire la valeur ℓ de la limite de la suite (v_n) .
 - d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.
4. On donne ci-contre la fonction **seuil**, écrite en langage Python.
 - a. Qu'observe-t-on si on saisit **seuil(0.4)** ?
 - b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de **seuil(0.35)**.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :  
    v=0.1  
    n=0  
    while v<a :  
        v=1.6*v-1.6*v*v  
        n=n+1  
    return n
```

Exercice 2 (5 points)

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties. Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas. Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2. De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre. On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

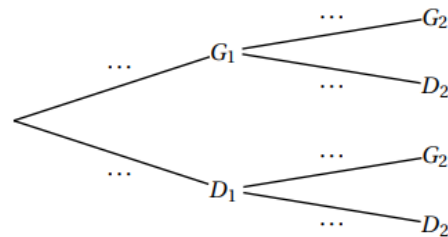
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée » ;

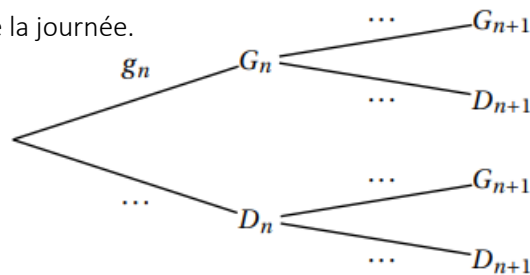
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul
 - a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ièmes et $(n + 1)$ -ième parties de la journée.



- b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son 1^{er} terme et sa raison.
 - b. Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.
 6. Etudier les variations de la suite (g_n)
 7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
 8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.
 9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```

1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)

```

Exercice 3 (3,5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie en justifiant votre réponse. Une justification par élimination est acceptée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$
- les points $C(-1; 2; -4)$ et $D(-5; 6; 4)$
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Alors :

Réponse A : (AB) et (CD) sont coplanaires ;

Réponse B : les points A , B et D sont alignés.

Réponse C : $C \in (AB)$

Réponse D : le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $(-2; 3; 3)$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

Réponse A : $M_1(-1; 3; -2)$;

Réponse B : $M_2(11; -9; -22)$;

Réponse C : $M_3(-7; 9; 2)$;

Réponse D : $M_4(-2; 3; 4)$.

3. : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

Réponse A : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$;

Réponse B : $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$;

Réponse C : $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Réponse D : $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

Réponse A : strictement parallèles ;

Réponse B : confondues ;

Réponse C : sécantes

Réponse D : non coplanaires

5. On considère le point E défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Réponse A : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$;

Réponse B : E a pour coordonnées $(4; -2; -1)$;

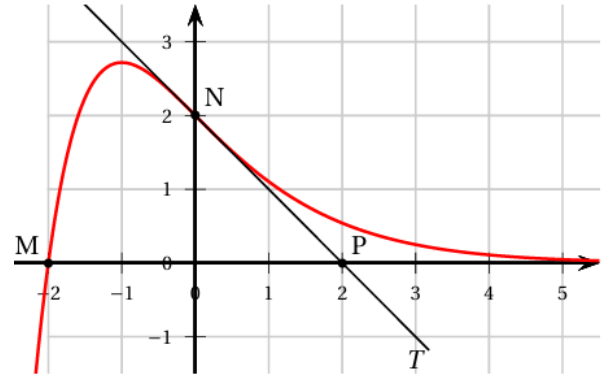
Réponse C : $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires ;

Réponse D : les points B , C , D et E sont alignés.

Exercice 4 : (6,5 points)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde. Dans le repère orthonormé ci-contre ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point $N(0; 2)$;
- le point $M(-2; 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $P(2; 0)$ appartenant à la tangente T .

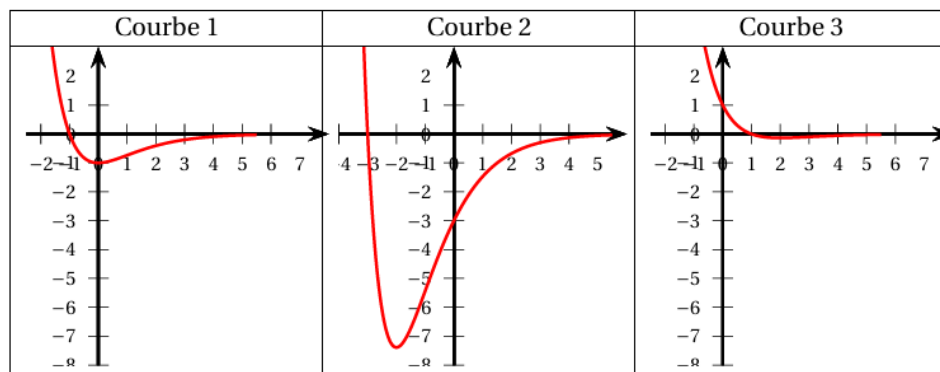


On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.

Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

- Donner $f(0)$.
 - Déterminer $f'(0)$. Justifier la réponse.
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
- Parmi les courbes suivantes, une seule est susceptible de représenter la fonction f' . Justifier votre réponse.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)e^{\lambda x}$, où a , b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

- Justifier que $b = 2$.
- Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .
- Déterminer λ . Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- On admet que, pour tout réel x , $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

- Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
 - Préciser la ou les abscisse(s) du ou des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.