

Exercice 1

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

- Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$.
Donc, pour tout n , on a : $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1,05^n$.
- Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus.
 $1,05 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,05^n = +\infty$; de plus, $v_0 > 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
Donc la population dépassera 60 000 individus à partir d'un certain rang.
Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par

$$u_0 = 12 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n.$$

- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
 - La fonction g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\frac{1,1}{605} \times 2x + 1,1 = -\frac{2,2}{605}x + 1,1$.
 $g'(x) > 0 \iff -\frac{2,2}{605}x + 1,1 > 0 \iff 1,1 > \frac{2,2}{605}x \iff \frac{1,1 \times 605}{2,2} > x \iff x < 302,5$
 Donc $g'(x) > 0$ sur $[0 ; 60]$ donc g est croissante sur $[0 ; 60]$.
 - On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$:
 $g(x) = x \iff -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \iff -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \iff x \left(-\frac{1,1}{605}x + 0,1 \right) = 0$
 $\iff x = 0 \text{ ou } -\frac{1,1}{605}x + 0,1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 0,1 = \frac{1,1}{605}x \iff x = 0 \text{ ou } x = 0,1 \times \frac{605}{1,1}$
 $\iff x = 0 \text{ ou } x = 55$ Donc $S = \{0; 55\}$
- On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$
Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2024.
 - Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$.
 - Initialisation**
Pour $n = 0$, $u_0 = 12$, $u_1 \approx 12,938$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.
 - Hérédité**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 55$.
Or la fonction g est croissante sur $[0 ; 60]$ donc $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(55)$.
Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x) = x$ donc $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$; de plus, $g(u_k) = u_{k+1}$ et $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$.
Donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 55$; donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie
 - Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire à partir de ce rang ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

De plus, g étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = g(\ell)$.

Par unicité de la limite, $g(\ell) = \ell$.

Donc d'après 1b), $\ell = 0$ ou $\ell = 55$

Or la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

(a) Comme la limite de (u_n) est 55, il existe un rang p à partir duquel $n \geq p$ implique $u_n \geq 50$.

(b) On complète l'algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r > 50$:

```
n = 0
u = 12
while u <= 50 :
    u = -1.1/605*u**2 + 1.1*u
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• Limite en $+\infty$

$$f(x) = x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$ donc

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} + 1 = \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + 1, \text{ et donc}$$

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}.$$

(b) Le signe de f'' donne les variations de f' .

Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante ;

- Si $x > \frac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante ;

- Si $x = \frac{3}{2}$, $f''(x) = 0$

donc f' admet un minimum égal à $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$.

(c) La fonction f' admet pour minimum

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0; \text{ donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

(d) • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x , $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

(e) On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,0009 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,286 ; -0,285]$$

Donc $-0,285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

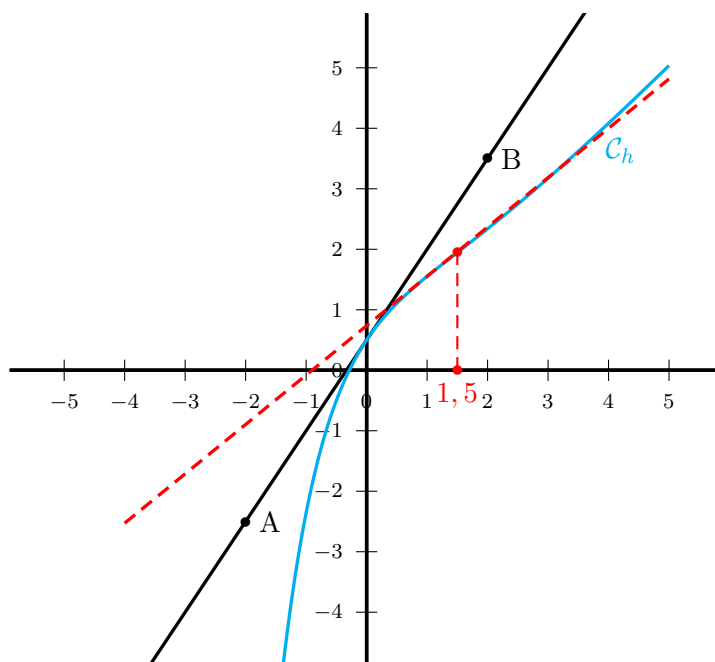
Partie B

On considère une fonction h , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b) e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2 ; -2,5)$ et $(2 ; 3,5)$.



$$1. \forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $h''(x)$ est du signe de $x - \frac{3}{2}$.

$h''(x)$ s'annule en changeant de signe en 1,5.

Donc la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1,5.

$$2. \text{Méthode 1 : } M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

...

$$\iff 3x - 2y + 1 = 0$$

Donc la droite (AB) a pour équation : $3x - 2y + 1 = 0$.

$$\text{Méthode 2 : } (AB) : y = mx + p \text{ où } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2}; \text{ donc } (AB) : y = \frac{3}{2}x + p$$

$$A(-2; -2.5) \in (AB) \text{ donc } p = -2.5 - \frac{3}{2} \times (-2) = \frac{1}{2}.$$

Donc la droite (AB) a pour équation : $y = 1,5x + 0,5$.

$$3. \text{La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction } h \text{ au point d'abscisse } 0, \text{ donc } h'(0) = 1,5.$$

$$h'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1)e^{-x} + 1 = (-ax + a - b)e^{-x} + 1$$

$$h'(0) = 1,5 \iff (a - b)e^0 + 1 = 1,5 \iff a - b = 0,5$$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0,5$.

$$h(0) = 0,5 \iff (0 + b)e^0 + 0 = 0,5 \iff b = 0,5$$

Comme $a - b = 0,5$, on en déduit que $a = 1$.

$$\text{Donc } h(x) = (x + 0,5)e^{-x} + x = f(x).$$

Exercice 3

$$1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } (\overrightarrow{CD} = -4\overrightarrow{AB}).$$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles donc coplanaires. Réponse A.

$$2. \text{Pour } t = -2, \text{ on trouve les coordonnées de } N. \text{ Donc réponse B.}$$

$$3. M(x; y; z) \in (AB) \text{ s'il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \times t \\ y - 0 = 1 \times t \\ z - 2 = -2 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 1 - u$, on obtient :

$$M(x ; y ; z) \in (AB) \iff \begin{cases} x = 2 - u \\ y = 1 - u \\ z = 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}. \text{ Donc réponse B.}$$

4. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires. Donc réponse A.

5. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De plus, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Cela exclut les réponses A et B.

Cherchons s'il existe $u, t \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - u \\ -2 + t = 1 - u \\ 4 - t = 2u \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - u \\ -2 + t = 1 - u \\ 4 - t = 2u \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2t = 2 - u \\ 2 = 1 + u \\ 4 - t = 2u \end{cases} \iff \begin{cases} u = 1 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \text{ Donc le système est incompatible.}$$

Donc (AB) et Δ ne sont pas sécantes, elles sont donc non coplanaires. Réponse D

Exercice 4

Partie A

1. Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 5,7% des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0,057$.

2. (a) — On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès : « l'individu choisi a déjà été infecté », a une probabilité $p = 0,057$;

— Cette épreuve est répétée $N = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car le prélèvement des 100 individus est assimilé à un tirage avec remise) ;

— X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces répétitions.

Avec ces éléments, on peut affirmer que X suit la loi binomiale de paramètres $N = 100$ et $p = 0,057$.

Remarque : le paramètre donnant le nombre de répétitions est souvent noté n , plutôt que N , mais dans la question 2. e., un entier n est introduit, donc pour éviter le conflit de notation, on utilise N ici.

(b) Puisque X suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0,057 = 5,7$. On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.

(c) La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.

Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour k entier naturel inférieur à n) :

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \times p^k \times (1 - p)^{N-k}.$$

$$\text{On a donc, ici : } P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028.$$

- (d) La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :
 $P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{X} \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).

À la calculatrice, on obtient : $P(X \geq 2) \approx 0,9801$.

- (e) Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leq 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leq 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leq 9) \approx 0,9408$.

L'entier cherché est 9.

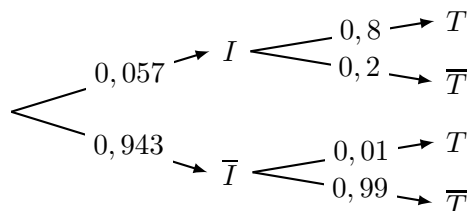
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

Partie B

1. L'évènement I est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.

- La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
- celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99$.

Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :



2. Les évènements I et $\bar{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = P(I) \times P_I(T) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,05503.$$

3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles :

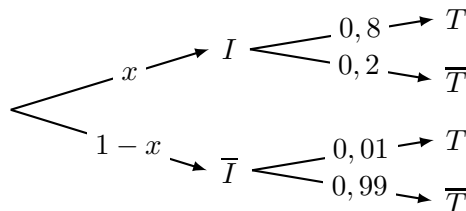
$$P_T(I) = \frac{P(T \cap I)}{P(T)} = \frac{0,057 \times 0,8}{0,05503} = \frac{4560}{5503} \approx 0,8286.$$

Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,8286 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

Partie C

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x .

On a donc l'arbre suivant :



Les évènements I et $\bar{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = x \times 0,8 + (1-x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01.$$

D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.

On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$

$$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844$$

$$\iff x = \frac{0,2844}{0,79}$$

$$\iff x = \frac{2844}{7900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\frac{2844}{7900} = 0,36$.

Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.