

Exercice 1**Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire**

1. Augmenter de 60 %, c'est multiplier par $1 + \frac{60}{100} = 1,6$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,6 \times u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,6$.

La forme explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est: $u_n = u_0 \times q^n$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.

2. $1,6 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 1,6^n = +\infty$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
Donc il existe un rang à partir duquel $u_n > 400000$, c'est-à-dire à partir duquel le nombre d'insectes dépasse 400 000.
Selon ce modèle le milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B : Étude d'un second modèle

1. $v_1 = 1,6v_0 - 1,6v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144$.

Le nombre d'insectes au bout d'un mois est donc égal à 144 000.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

- (a) On résout l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,6x - 1,6x^2 = x \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \iff x(0,6 - 1,6x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,6 - 1,6x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,6}{1,6} \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Les deux solutions appartiennent à l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans cet intervalle: 0 et $\frac{3}{8}$.

- (b) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

$$\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right], f'(x) = 1,6 \times 1 - 1,6 \times 2x = 1,6(1 - 2x)$$

$$x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right] \text{ donc } x \leq \frac{1}{2} \text{ et donc } 1 - 2x \geq 0.$$

$$\text{Sur } \left[0 ; \frac{1}{2}\right], f'(x) \geq 0 \text{ donc } f \text{ est croissante.}$$

3. (a) On va montrer par récurrence que la propriété P_n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n .

- **Initialisation**

$$v_0 = 0,1 \text{ et } v_1 = \frac{3}{8}; \text{ on a donc } 0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}.$$

La propriété P_0 est donc vraie.

- **Hérédité**

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } P_k \text{ est vraie, c'est-à-dire } 0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{On sait que la fonction } f \text{ est croissante sur } \left[0 ; \frac{1}{2}\right]; \text{ donc } f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Donc } 0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0,4$$

$$\text{Donc } 0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } P_{k+1} \text{ est vraie.}$$

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire à partir de ce rang; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On sait que:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$, donc la suite (v_n) est croissante;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \frac{1}{2}$, donc la suite (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

(c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, on a $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$.

De plus, f étant dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, elle est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc en ℓ .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(\ell)$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = f(\ell)$.

Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$.

Donc d'après 2a), $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{3}{8}$.

Or la suite (v_n) est croissante et $u_0 = 0.1$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 0.1.

On en déduit donc que $\ell = \frac{3}{8}$ (ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 375 000 insectes).

La suite (v_n) est croissante et admet pour limite 0.375

Pour tout n , on aura $v_n \leq 0,375$; il y aura donc toujours moins de 375 000 insectes. Donc, selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

La fonction `seuil(a)` donne la première (et plus petite) valeur de n telle que $v_n \geq a$, c'est-à-dire telle que $v_n \geq a$.

- (a) On a vu que $v_n \leq 0,375$ pour tout n ; il n'y a donc pas de valeur de n pour laquelle $v_n \geq 0,4$.
Le programme ne s'arrête jamais.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

- (b) À la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 0,338 < 0,35$ et $v_6 \approx 0,358 \geq 0,35$; donc la valeur renvoyée par `seuil(0.35)` est 6.

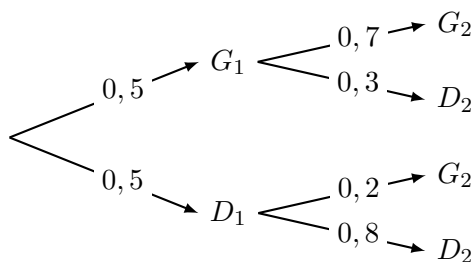
Cela signifie qu'au bout de 6 mois, il y aura plus de 350 000 insectes.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

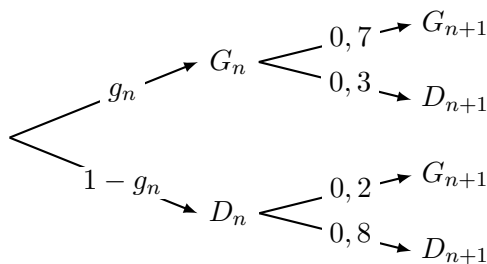
2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. (a) On a l'arbre suivant :



(b) Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

5. (a) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

(b) On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$$

$$\text{Or pour tout entier naturel } n \text{ non nul} \quad g_n = v_n + 0,4 \quad \text{donc} \quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_{n+1} - g_n < 0$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n - 0,4 \leq 0,001$

$$\begin{aligned} g_n - 0,4 \leq 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leq 0,001 \\ &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001 \\ &\iff 0,5^{n-1} \leq 0,01 \quad \text{car } 0,1 > 0 \\ &\iff \ln(0,5^{n-1}) \leq \ln(0,01) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01) \\ &\iff (n-1) \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car } \ln(0,5) < 0 \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 = \frac{-\ln(100)}{-\ln(2)} + 1 = \frac{\ln(100) + \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,64$ donc, n étant un entier, la plus petite valeur de n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$ est 8.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e :
        g = 0.5 * g + 0.2
        n = n + 1
    return(n)
```

Exercice 3 Question 1 : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$).

Donc (AB) et (CD) sont parallèles donc coplanaires. Réponse A.

> **Question 2 :** On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}'$ sont $(11 ; -9 ; -22)$ soit les coordonnées de M_2 .

Réponse B.

Question 3 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Réponse C.

Question 4 :

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; il est colinéaire à $\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.

De plus en remplaçant t par $\frac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}'$ on obtient $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.

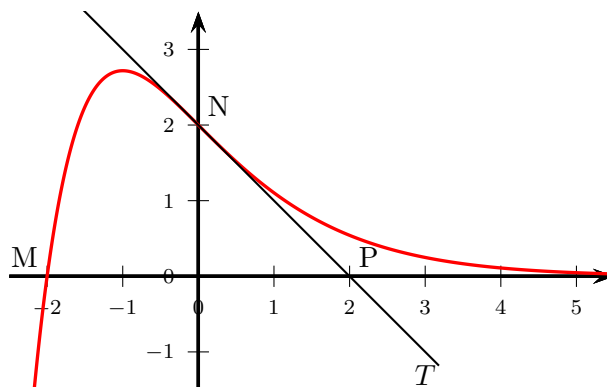
Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

Réponse B.

Question 5 : En faisant apparaître le point B dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} \iff \overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$: le vecteur $\overrightarrow{BE}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires. Donc réponse C.

Exercice 4

6 points



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

- (a) On lit $f(0) = 2$.
 (b) Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) :

$$f'(0) = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$
- Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.
- Non : Sur l'intervalle $] -\infty; 0]$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est sous ses tangentes; donc f est concave sur cet intervalle.
- Sur $] -\infty; -1]$, f étant croissante, f' est positive
 Sur $[-1; +\infty[$, f étant décroissante, f' est négative
 La courbe de f' est donc la courbe 1.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

- On a vu que $f(0) = 2 \iff b e^{\lambda \times 0} = 2 \iff b = 2$.
 Donc $f(x) = (ax + 2)e^{\lambda x}$.

2. On a donc $f(x) = (ax + 2)e^{\lambda x}$.

On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)e^{-2\lambda} = 0$ et comme $e^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.

Donc $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$.

3. On a vu que $f'(0) = -1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = e^{\lambda x} + \lambda(x+2)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1 + \lambda x + 2\lambda).$$

$$\text{Donc } f'(0) = -1 \iff 1 + 2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1.$$

On a donc finalement $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

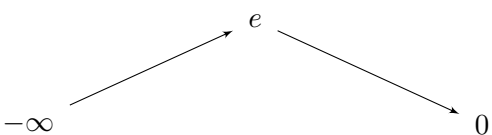
On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+2 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ par limite de l'inverse, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par limite de produit.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-x-1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
variations de f			

Il reste à calculer la limite en plus l'infini : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ (limite de l'inverse).

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ par limite de quotient. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par limite de somme.

3. (a) f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f''(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x , donc :

- f est convexe sur $[0 ; +\infty[$;
- f est concave sur $] -\infty ; 0]$;

(b) Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathcal{C}_f$ a un seul point d'inflexion : le point d'abscisse 0.