

CORRECTION BAC BLANC n°1

Le barème est sur 30 points.

EXERCICE 1 : DÉNOMBREMENT

6 points

- 1) Choix du comité L'ordre ne compte pas, on a donc une combinaison. Le nombre total de comités de 6 personnes parmi 30 est donné par :

$$C_{30}^6 = \binom{30}{6} = \frac{30!}{6!(30-6)!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 593775.$$

Réponse : 593 775 comités possibles.

- 2) Répartition filles/garçons Comités avec exactement 3 filles et 3 garçons
Le nombre de comités avec 3 filles parmi 12 et 3 garçons parmi 18 est :

$$\binom{12}{3} \times \binom{18}{3}.$$

Calculons chaque combinaison :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220,$$

$$\binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 816.$$

Ainsi,

$$220 \times 816 = 179520.$$

Réponse : 179 520 comités avec exactement 3 filles et 3 garçons.

- 3) Comités avec au moins une fille Le contraire d'avoir au moins une fille est n'avoir aucune fille, soit que des garçons.

Total – Comités avec 0 fille.

Le nombre de comités avec uniquement 6 garçons :

$$\binom{18}{6} = \frac{18!}{6!(18-6)!} = 18564.$$

Ainsi,

$$593775 - 18564 = 575211.$$

Réponse : 575 211 comités contiennent au moins 1 fille.

- 4) Rôle spécifique Ici, l'ordre compte, donc on a un arrangement de 2 parmi 6. Un comité de 6 personnes étant choisi, le nombre de façons d'assigner un président et un secrétaire est :

$$6 \times 5 = 30.$$

Réponse : 30 façons différentes.

Équipes distinctes

5) Répartition en deux équipes de 15.

Le nombre de façons de choisir 15 personnes parmi 30 pour le premier groupe et qu'un seul choix pour le second :

$$\binom{30}{15} = \frac{30!}{15!15!} = 155117520.$$

Mais comme ces deux groupes sont interchangeables, il faut diviser ce résultat par 2 : on a ainsi 77 558 760 possibilités

Réponse : 77 558 760 répartitions possibles.

6) Équipe uniquement composée de garçons On choisit 15 garçons parmi 18, les autres étant tous dans l'autre groupe.

$$\binom{18}{15} = \binom{18}{3} = 816.$$

Réponse : 816 répartitions avec une équipe composée uniquement de garçons.

EXERCICE 2 : FONCTION LN

7 points

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1) g somme de fonctions dérivable sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :

$$g'(x) = 4x - \frac{4}{x} = \frac{4x^2 - 4}{x}.$$

2) Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $4x^2 - 4$ ou encore $x^2 - 1$; celui-ci est positif sauf entre les racines -1 et 1 .

Donc sur $]0 ; 1[$, $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante ;

sur $]1 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante.

3) Le minimum $g(1) = 6$ de la fonction est supérieur à zéro : la fonction g est donc positive non nulle sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

1) a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

b) Graphiquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

2) a) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Soit la fonction d définie sur $]0 ; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - (2x - 3) = 4 \frac{\ln(x)}{x}$.

La position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de

$d(x) = 4 \frac{\ln(x)}{x}$ c'est-à-dire du signe de $\ln(x)$ car $x > 0$;

donc sur $]0 ; 1[$, $d(x) < 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est sous la droite $\mathcal{D}$;

sur $]1 ; +\infty[$, $d(x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$.

3) f somme de fonctions dérivable sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle,

$$f'(x) = 2 + 4 \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} \right) = 2 + 4 \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2} \right) = \frac{2x^2 + 4 - 4 \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- 4) Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Or on a vu à la partie A que $g(x) > 0$ si $x > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$+$
$f(x)$	$ $	$-\infty \nearrow +\infty$

- 5) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ à valeurs dans $[-1; f(2)]$; $f(1) = 2 - 3 + 4 \frac{\ln(1)}{1} = -1 < 0$ et 0 appartient à $[-1; f(2)]$.

$$f(2) = 4 - 3 + 4 \frac{\ln(2)}{2} = 1 + 4 \frac{\ln(2)}{2} > 0.$$

Conclusion : il existe un réel unique α de $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- b) La calculatrice donne : $f(1,1981) \approx -0,0004$ et $f(1,1982) \approx 0,00004$.

Donc $1,1981 < \alpha < 1,1982$.

- c) On a $f(\alpha) = 0$ donc, $2\alpha - 3 + 4 \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = 0$ d'où : $\ln(\alpha) = \alpha \times \frac{3 - 2\alpha}{4} = \frac{-2\alpha^2 + 3\alpha}{4}$

- 6) Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est égale à 2. Il faut donc résoudre l'équation :

$$f'(x) = 2 \iff \frac{2x^2 + 4 - 4\ln(x)}{x^2} = 2 \iff 2x^2 + 4 - 4\ln(x) = 2x^2 \iff$$

$$4 - 4\ln(x) = 0 \iff 4 = 4\ln(x) \iff 1 = \ln(x) \iff x = e.$$

EXERCICE 3 : SUITES

7,5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

- 1) a) $u_1 = \frac{1}{5}u_0^2 = \frac{16}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5}u_1^2 = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{5} = \frac{256}{125}$

- b) On complète la fonction ci-dessous qui renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p) :
    u = 4
    for i in range(1, p + 1) :
        u = u*u/5
    return u
```

- 2) a) Soit, pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n \leq 4$ ».

- **Initialisation**

$u_0 = 4$ et $0 < 4 \leq 4$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

Soit k un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}_k$ vraie, c'est-à-dire $0 < u_k \leq 4$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire $0 < u_{k+1} \leq 4$.

$0 < u_k \leq 4$ (par hypothèse de récurrence)

donc $0 < u_k^2 \leq 16$ (la fonction carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$)

$$\text{donc } 0 < \frac{1}{5}u_k^2 \leq \frac{16}{5}$$

Or $\frac{16}{5} = 3,2 \leq 4$ donc $0 < \frac{1}{5}u_k^2 \leq 4$, c'est-à-dire $0 < u_{k+1} \leq 4$.

Donc si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

• **Conclusion**

La proposition est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n \leq 4$.

b) Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n \left(\frac{u_n}{5} - 1 \right) = u_n \left(\frac{u_n - 5}{5} \right)$

$u_n \leq 4$ donc $u_n - 5 < 0$; or $u_n > 0$ donc $u_n(u_n - 5) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

On en conclut que la suite (u_n) est décroissante.

c) Pour tout n , $0 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente (vers un réel ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 4$).

- 3) a) • (u_n) converge vers un nombre réel ℓ ;
 • la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ est une fonction continue sur $[0; 4]$ donc continue en ℓ .
 • Pour tout n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On peut en conclure, d'après le théorème du point fixe, que $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

Autre rédaction possible :

- d'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$;
- d'autre part, par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{5}\ell^2$.

Donc, par unicité de la limite, $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

b) ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{5}x^2$; on résout cette équation.

$$x = \frac{1}{5}x^2 \iff x \left(1 - \frac{1}{5}x \right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$$

Or, pour tout n , on a : $0 < u_n \leq 4$ donc ℓ vérifie $0 \leq \ell \leq 4$. La solution $\ell = 5$ n'est donc pas valable, et donc $\ell = 0$.

4) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n^2) = -\ln(5) + 2\ln(u_n) = 2\ln(u_n) - \ln(5) = 2v_n - \ln(5)$

b) Pour tout n , $w_n = v_n - \ln(5)$ donc $v_n = w_n + \ln(5)$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(w_n + \ln(5)) - 2\ln(5) \\ &= 2w_n + 2\ln(5) - 2\ln(5) = 2w_n \end{aligned}$$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c) $v_0 = \ln(u_0) = \ln(4)$ donc $w_0 = v_0 - \ln(5) = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

donc, pour tout entier naturel n , on a : $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$.

Pour tout n , $v_n = w_n + \ln(5)$ donc $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$; $\frac{4}{5} < 1$ donc $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$.

On en déduit par produit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

$v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 0$.

On a donc redémontré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 : VRAI / FAUX

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Affirmation 1 :

FAUX, comme contre-exemple, on peut prendre $v_n = (-1)^n$ et $u_n = -1$ et $w_n = 1$.

Affirmation 2 :

VRAI :

(u_n) est croissante donc pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$

(w_n) est décroissante donc pour tout entier naturel n , $w_n \leq w_0$

On obtient donc $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$.

2) Affirmation 3 : VRAI, on démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{1}{2}$, et on utilise ensuite le théorème d'encadrement.

3) Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

VRAI. Le contraire de obtenir au moins 1 fois le chiffre 0 est de ne jamais l'obtenir : donc, on retire à l'ensemble des résultats possibles le nombre de codes où il n'y a aucun chiffre zéro. On a 10^4 possibilités pour les chiffres et on a $3 \times 2 = 6$ possibilités pour les lettres distinctes. Donc : $10^4 \times 6 - 9^4 \times 6 = 20634$

EXERCICE 5 : ESPACE

5 points

Premier défi : Drone et filet

1) Expression des vecteurs

Nous exprimons les vecteurs demandés dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

On a : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AP}$

nous obtenons :

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE},$$

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

2) Coplanarité des vecteurs

$\vec{EG}$, $\vec{EQ}$ et $\vec{PF}$ sont coplanaires, car, à l'aide des résultats de la question précédente, on obtient : $3\vec{PF} = 2\vec{EG} - 3\vec{EQ}$ ou encore $2\vec{EG} = 3\vec{PF} + 3\vec{EQ}$.

3) Position relative du plan et de la droite (PF)

$\vec{PF}$ est un vecteur directeur de la droite (PF) , $(\vec{EF}; \vec{EQ})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (EGQ) ($\vec{EF}$ et $\vec{EQ}$ ne sont pas colinéaires).

Or, d'après la question précédente, $\vec{EG}$, $\vec{EQ}$ et $\vec{PF}$ sont coplanaires, et la droite (PF) n'est pas incluse dans le plan (EGQ) ,

donc la droite (PF) est strictement parallèle au plan (EGQ) .

Le drone ne se prendra donc pas dans le filet.

Second défi : Drone et point d'équilibre

1) Coordonnées des points E , G et Q Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a :

$$\begin{aligned} E(0, 0, 1), \\ G(1, 1, 1), \\ Q\left(0, \frac{2}{3}, 0\right). \end{aligned}$$

2) Coordonnées du centre de gravité J Le milieu I de $[GE]$ est donné par :

$$I\left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Le centre de gravité J est situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[QI]$ en partant de Q , donc :

$$\vec{QJ} = \frac{2}{3} \times \vec{QI} \text{ donc :}$$

$$J\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right).$$

Troisième défi : Drone et trajectoire

Si le drone se déplace de H à J puis de J à B , nous vérifions s'il suit une trajectoire rectiligne en déterminant si H , J et B sont alignés, ce qui revient à vérifier si les vecteurs $\vec{HJ}$ et $\vec{JB}$ sont colinéaires. Si $\vec{HJ} = k\vec{JB}$ pour un réel k , alors la trajectoire est rectiligne.

Or : $\vec{HJ}\left(\frac{1}{3}; \frac{-4}{9}; \frac{-1}{3}\right)$ et $\vec{JB}\left(\frac{2}{3}; \frac{-5}{9}; \frac{-2}{3}\right)$, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, le trajet du drone n'est pas rectiligne.