

BAC BLANC n°1

L'usage d'une calculatrice personnelle en mode examen est autorisé. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Inscrire en haut à gauche de votre copie le **nom** de votre **professeur de mathématiques**.

Le barème est sur 30 points.

EXERCICE 1 DÉNOMBREMENT

6 points

Une association possède 30 adhérents, dont 12 filles. Elle doit élire un comité formé de 6 personnes.

1. Choix du comité

Combien de comités différents peut-on former ?

2. Répartition filles/garçons

- a) Combien de comités de 6 membres peut-on former contenant exactement 3 filles et 3 garçons ?
- b) Combien de comités de 6 membres peut-on former contenant au moins 1 fille ?

3. Rôle spécifique

Un comité a été choisi. Supposons qu'on doive désigner un président et un secrétaire parmi les 6 membres de ce comité. De combien de façons différentes peut-on assigner ces rôles ?

4. Équipes distinctes

- a) On décide de diviser les 30 personnes en deux équipes de 15 personnes. Combien de façons existe-t-il pour faire cette répartition ? (L'ordre des équipes n'a pas d'importance).
- b) Parmi ces répartitions, combien contiennent une équipe composée uniquement de garçons ?

EXERCICE 2 : FONCTION LN

7 points

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 - 4\ln(x) + 4.$$

- 1) Démontrer que la fonction dérivée g' de la fonction g vérifie, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{x}.$$

- 2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3) Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

- 1) a) Déterminer la limite de f en 0.
b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Calculer $d(x) = f(x) - (2x - 3)$.
En déduire la position relative de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ et de la courbe $\mathcal{C}$.
3) Démontrer que la dérivée f' de la fonction f vérifie, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- 4) À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1 ; 2]$.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α .
c) Déduire de la question a) l'expression de $\ln(\alpha)$ en fonction de α .
6) Pour quelle valeur de x la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle, au point d'abscisse x , une tangente parallèle à $\mathcal{D}$?

EXERCICE 3 SUITES

7 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

- 1) a) Calculer u_1 et u_2 .
- b) Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée `suite_u` et prend pour paramètre l'entier naturel p . Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p) :  
    u= ...  
    for i in range(1,...) :  
        u =...  
    return u
```

- 2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 4$.
b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3) a) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
b) En déduire la valeur de ℓ .
- 4) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
c) Pour tout entier naturel n , donner l'expression de w_n , puis de v_n en fonction de n .
d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 4 : VRAI / FAUX

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) • On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) , telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$.
De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

Affirmation 1 :

La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

- On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 2 :

Pour tout entier naturel n , on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

- 2) Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}$.

Affirmation 3 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

- 3) Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 4 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins une fois le chiffre 0.

EXERCICE 5 ESPACE

6 points

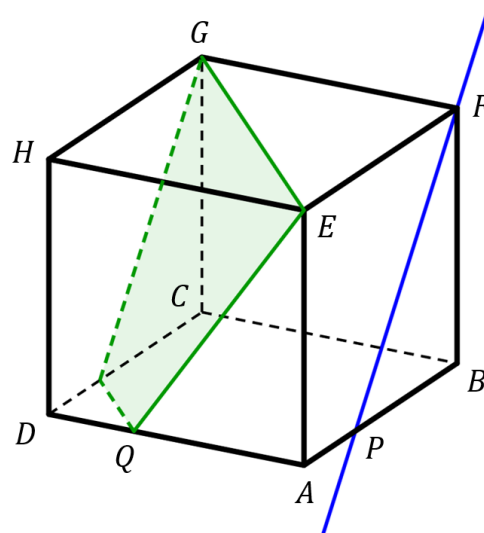
Sur un terrain vague est organisé un jeu de cohésion de groupe.

Les participants doivent faire voler un drone, dans un premier temps, le long d'un mur $ABFE$. Le drone part d'un point P appartenant au segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Sur ce terrain vague, divers obstacles sont placés dans un cube adossé au mur, que l'on nomme $ABCDEFGH$.

En particulier, on a suspendu, à l'extérieur du cube, un filet rectangulaire, coupant les faces de ce cube, comme indiqué sur le schéma ci-dessous, en passant par les points G , E et Q , définis par $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Cette situation est représentée sur le dessin ci-dessous.



Premier défi : drone et filet

- 1) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EQ}$ et $\overrightarrow{PF}$ en fonction des $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
- 2) Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Montrer que les $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EQ}$ et $\overrightarrow{PF}$ sont coplanaires.
- 3) Le drone se déplace sur la droite (PF) . Se prendra-t-il dans les mailles du filet (qui, rappelons-le, se prolonge à l'extérieur du cube)?
Pour répondre à cette question, on cherchera à déterminer la position relative du plan du filet et de la droite (PF) .

Second défi : drone et point d'équilibre

Un second défi consiste à positionner le drone sur le centre de gravité du triangle QEG :

- 1) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer les coordonnées des points E , G et Q .
- 2) Déterminer les coordonnées du point I , milieu de $[GE]$, puis en déduire que celles du centre de gravité J du triangle QEG sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{9}; \frac{2}{3}\right)$.

On rappelle que le centre de gravité d'un triangle se situe aux $\frac{2}{3}$ de la médiane en partant du sommet.

Troisième défi : drone et trajectoire

Si le drone se déplace de H à J , puis de J à B , suit-il une trajectoire rectiligne ?