

TERMINALES
1 - 2 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

durée : 4h

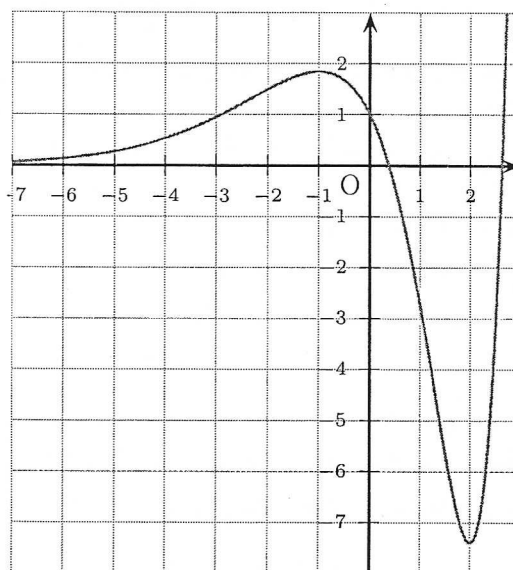
calculatrices autorisées

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE N°1 :**(3,5 points)****Partie A**

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f' . Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente ($\mathcal{T}$) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f . On admet que, pour tout réel x , on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$.

5. a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 \ln(x + 3) - x.$$

1. a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0 ; +\infty[$.
- b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a :

$$f(x) = x \left(\frac{5 \ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On notera α cette solution.
- b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14 ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5 \ln(u_n + 3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 5 \ln(x + 3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g .

1. a) Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur sa convergence.
2. a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
- c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
- d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
- e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```

u prend la valeur 4
Tant que u - 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5 ln(u + 3)
Fin Tant que
Afficher u
    
```

- a) Justifier que cet algorithme se termine.
- b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 2 décimales).

Partie A :

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend trois questions indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves.

De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

a. 31^5

c. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$

b. $\binom{31}{5}$

d. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

2. On tire dans un jeu de 32 cartes une main de 5 cartes (on rappelle que dans une main, l'ordre des cartes ne compte pas). Alors le nombre de mains contenant exactement 1 as est :

a. $\binom{4}{1} + \binom{28}{4}$

c. $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$

e. rien de ce qui précède

b. $\frac{\binom{4}{1} \times \binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}$

d. $\frac{\binom{4}{1} + \binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}$

3. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50.

On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**.

On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées.

Quel est le nombre de tirages possibles, sans tenir compte de l'ordre des numéros ?

a. 50^3

c. $1 \times 2 \times 3$

b. $50 \times 49 \times 48$

d. $\frac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

Partie B :

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

1. *Affirmation 1* : Dans une classe de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

2. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 2 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

EXERCICE N°4 :**(6 points)**

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On pioche au hasard une boule dans U_1 qu'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

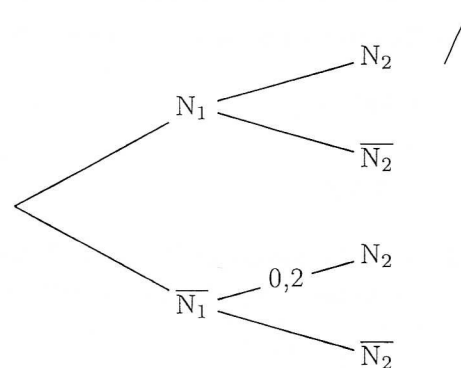
- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A , on note $\bar{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

- Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.
- Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



- Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .
- Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
- On a pioché une boule noire dans l'urne U_2

Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 .

On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

- Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.
- Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,72^n \geq 0,9$.
- Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

- Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
- Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
- La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Nom et prénom : *Nguyen khac Matteo*

Classe : Terminale ⁹

Annexe 1

(Exercice 1)

À rendre avec la copie

