

Contrôle de mathématiques

EXERCICE 1

ROC

(3 points)

Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.En déduire alors que la suite (q^n) , avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Limites de suites définies explicitement

(4 points)

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$

3) $u_n = \frac{3n}{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $n \geq 2$, $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1}$

4) $u_n = 5^n - 4^n$

EXERCICE 3

Suite arithmético-géométrique

(4 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 6$ 2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ .4) Déterminer la limite ℓ .

EXERCICE 4

Suite auxiliaire

(3,5 points)

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout n non nul $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.1) Calculer u_2, u_3, u_4 2) On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour n non nul.a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n avec n non nul.c) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$, en déduire la limite ℓ de la suite (u_n) .

EXERCICE 5

Tableau excel

(7 points)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Camille a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

Une copie d'écran est donnée ci-contre.

1) Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2) Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13

Camille obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites :

$$(u_n) \text{ et } \left(\frac{u_n}{v_n}\right).$$

Partie B : Étude des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ 1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.2) Déterminer la limite de la suite (u_n) .3) En remarquant que $\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}$, démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.4) On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.