

Exercices logarithme népérien

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé l'ensemble de définition.

1. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = 0$

2. $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$

3. $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-3)$

4. $2\ln^2(x) - \ln(x) - 3 < 0$

5. $\ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = 1$

Exercice 2

Déterminer les limites de la fonction f à l'endroit indiqué.

1. $f(x) = (\ln x)^2$ en 0 et $+\infty$.

2. $f(x) = \frac{2\ln x + 7}{x + \ln x}$ en $+\infty$.

3. $f(x) = \frac{\ln(1-4x)}{x}$ en 0.

4. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\tan x}$ en $x = 0$.

Exercice 3

Soit f définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x - 2x + 1$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D .

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution α unique α sur $[e; +\infty[$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

- Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.
- En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 5

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & \text{pour } x > 0 \\ -1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 1] = 0$ et en déduire que f est continue en 0.
 - Démontrer que f est dérivable en 0. Déterminer $f'(0)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?
- Etudier la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
- Montrer que le signe de f' est celui de $(1 - \ln x)$. Dresser le tableau de variation de f .
- Préciser le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses et déterminer l'équation de la tangente en ce point. Tracer sommairement la fonction f .

Exercice 6

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln x$$

- Etudier les variations de g .
- En déduire que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $g(x) \geq 1$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$

- Justifier que f est bien définie sur $]0; +\infty[$
- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
- Etudier les variations de f et donner son tableau de variations.
- Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \ln 3$ est asymptote à C .
 - Etudier la position de C par rapport à Δ .
- Tracer la droite Δ et la courbe C .
- Soit g la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ par $g(x) = f(|x|)$.
 - Justifier que g est une fonction paire.
 - Déduire de l'étude de f le tableau complet des variations de g .
 - Expliquer comment on obtient la courbe représentative Γ représentative de g à partir de la courbe C puis tracer Γ .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire** Soit g la fonction définie sur I par :

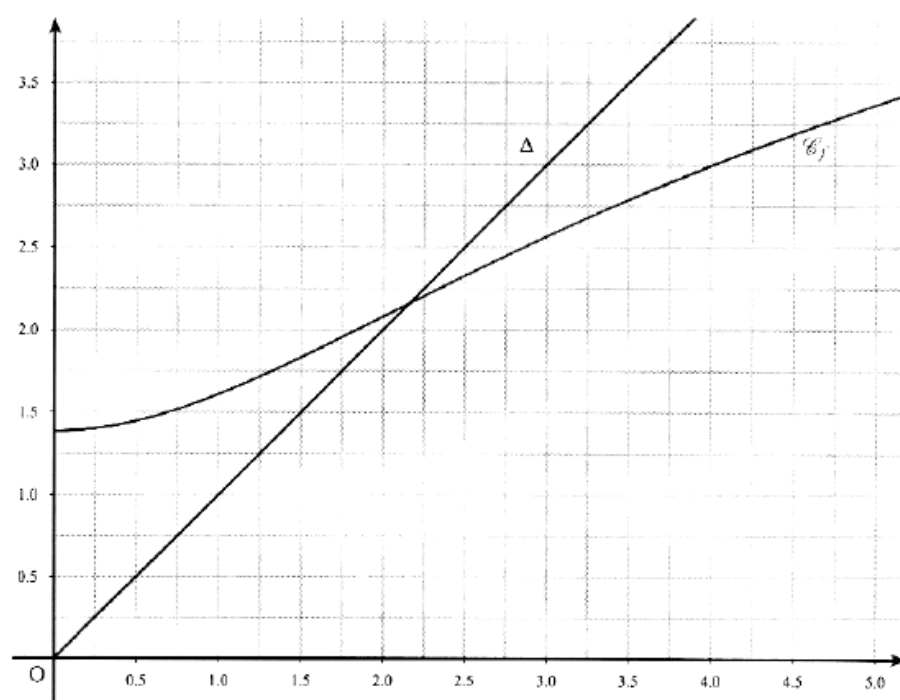
$$g(x) = 1 + x - x \ln x$$

- Etudier les limites de g en chacune des bornes de son ensemble de définition.
 - Etudier les variations de g et construire son tableau de variation.
 - Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I . Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
 - Déduire de ce qui précède le signe de g sur I .
2. **Etude et représentation graphique de la fonction f**
- Etudier les limites de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.
 - Justifier que f est dérivable sur I , et montrer que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

- En déduire le signe de f' et dresser le tableau de variation de f sur I .
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
- Déterminer une équation réduite de la tangente T de $\mathcal{C}$ au point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

Exercice 9



Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

- 1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 - a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(x^2 + 4) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$.
En déduire la limite de g en $+\infty$.
 - b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis établir son tableau de variations.
 - c) Montrer que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α .
 - d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de l'algorithme par dichotomie. On donnera le nombre d'itérations. On pourra calculer la valeur approchée de $g(3)$
 - e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de g sur $[0 ; +\infty[$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

- 1) En utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.
Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite (u_n) et à sa convergence ?
- 2) Placer le point I de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui a pour abscisse α .
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq \alpha$.
b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers ℓ
c) Déterminer la valeur ℓ et en donner une valeur approchée au millièmes.

Exercice 10

- 1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ b) $\ln(3x^2 - x - 2) > \ln(6x + 4)$

- 2) a) Montrer que : $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$
b) En déduire les solutions de : $2 \ln^3 x - 3 \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

Exercice 11

Résoudre l'équation et le système suivants :

1) $\ln(2x-3) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$ 2)
$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = 7 \\ 3 \ln x - 5 \ln y = 4 \end{cases}$$