

Exercice 1

1. Affirmation 1 : Soit $f: x \mapsto \sqrt{2x^2 + 7}$. On admet que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 f est de la forme $\sqrt{u}$ où $u: x \mapsto 2x^2 + 7$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+7}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+7}}$

Ainsi $f'(-1) = \frac{2 \times (-1)}{\sqrt{2 \times (-1)^2 + 7}} = -\frac{2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$

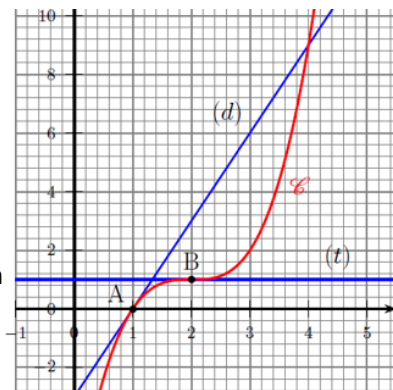
Donc l'affirmation 1 est vraie

2. En s'appuyant sur la figure ci-contre :

Affirmation 2 : $g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (d) donc $g'(1) = \frac{6}{2} = 3$.

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 3 : la tangente à C_g au point B traverse la courbe C_g donc B est un point d'inflexion de la courbe C_g donc $g''(2) = 0$ L'affirmation 2 est vraie.

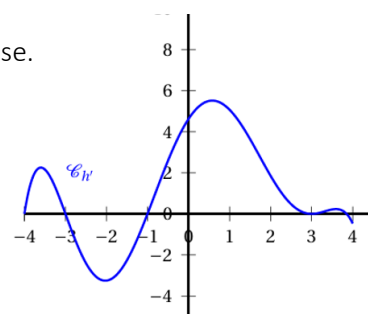


3. Affirmation 4 : h' est décroissante sur $[-3; -2]$ puis croissante sur $[-2; -1]$ donc la fonction h est concave sur $[-3; -2]$ et convexe sur $[-2; -1]$. L'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 : La courbe ci-contre représente la fonction dérivée de h , notée h' .

Les variations de h' donne la convexité de la fonction h . En -2 , h' change de variations donc la dérivée seconde h'' s'annule en changeant de signe donc l'affirmation 3 est vraie :

La représentation graphique de h admet un point d'inflexion en -2 .



Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5xe^{-x}$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$f = u \times v$ où $u: x \mapsto 5x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exponentielle avec une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u'(x) = 5$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$f' = u'v + v'u$

Pour tout réel x , $f'(x) = 5e^{-x} + (-e^{-x} \times 5x) = e^{-x}(5 - 5x)$.

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $5 - 5x$

Ainsi sur $] -\infty; 1]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante et sur $[1; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x , $f''(x) = e^{-x}(-10 + 5x)$.

a. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ revient à étudier le signe de $f''(x)$. Or pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-10 + 5x$. Ainsi sur $] -\infty; 2]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave et sur $[2; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe.

b. D'après la question précédente, il n'y a que pour $x = 2$ que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe donc il n'y a qu'un seul point d'inflexion d'abscisse égale à 2.

3. Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

a. Justifier que T a pour équation $y = 5(9 - 2x)e^{-3}$.

T a pour équation $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = (5 - 15)e^{-3}(x - 3) + 15e^{-3}$
 $= e^{-3}(-10x + 30 + 15) = e^{-3}(-10x + 45) = 5(-2x + 9)e^{-3}$.

b. Justifier que, pour tout réel $x \in [2; +\infty[$ on a : $e^{-x} \geq \frac{9-2x}{xe^3}$.

f est convexe sur $[2; +\infty[$ donc C_f se situe entièrement au-dessus de ses tangentes sur $[2; +\infty[$. De plus, $3 \in$

$[2; +\infty[$ donc pour tout réel $x \in [2; +\infty[$ on a : $5xe^{-x} \geq e^{-3} \times 5(-2x + 9) \Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{5(9-2x)e^{-3}}{5x}$ car $x > 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{(9-2x)}{5e^3}$ car $e^{-3} = 1/e^3$

Exercice 3 (5 points)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-1; 2; 2)$, $D(2; 2; 3)$ et $E(-2; 2; 7)$ cinq points.

1. a. Justifier que les points A , B et C définissent un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} = 1 \times 2 - 1 \times (-2) \neq 0$ donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A , B et C définissent un plan.

b. Les points A , B , C et D sont-ils coplanaires ?

Regardons si les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ regardons s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Soient a et b deux réels : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a - 2b \\ 2 = a + 2b \\ 1 = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{1}{2} - 2b \\ 2 = -\frac{1}{2} + 2b \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Le système n'est pas compatible donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires. On en déduit que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

2. a. Vérifier que $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \times 1 + (-2) = -4 \\ -2 \times 1 + 2 = 0 \\ -2 \times (-2) + 0 = 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC) .

On déduit de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Donc (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans le plan. Comme de plus $D \notin (ABC)$, on en déduit que (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) .

3. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + 6k \\ y = 2 - 3k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

a. Justifier que les droites d et (DE) ne sont pas parallèles.

Un vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (DE) est $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\frac{6}{-4} \neq \frac{0}{-3}$ donc les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites d et (DE) ne sont pas parallèles.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DE) .

(DE) est la droite passant par le point $D(2; 2; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc une représentation

paramétrique de cette droite est : $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2 \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

c. Montrer que ces droites sont en fait sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$M(x; y; z) \in d \cap (DE) \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et k tels que :

$\begin{cases} 2 - 4t = -1 + 6k \\ 2 = 2 - 3k \\ 3 + 4t = 6 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4t = -1 \\ k = 0 \\ 3 + 4t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \\ k = 0 \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$: le système est compatible donc les droites sont sécantes.

De plus, en remplaçant k par 0 dans la représentation paramétrique donnée pour la droite d , on obtient que leur point d'intersection est $M(-1; 2; 6)$.

4. Soit d_2 la droite passant par C et parallèle à la droite d .

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_2 .

d_2 est la droite passant par C et parallèle à la droite d donc un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une représentation

paramétrique de d_2 est donc $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

b. Déterminer les coordonnées du point K de la droite d_2 ayant pour ordonnée 5.

$K \in d_2$ et $y_K = 5$ donc $5 = 2 - 3t \Leftrightarrow 3t = -3 \Leftrightarrow t = -1$

On peut donc en déduire que $x_K = -1 + 6 \times (-1) = -7$ et $z_K = 2 - 2 \times (-1) = 4$

Ainsi $K(-7; 5; 4)$

Exercice 4 (5 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I et K les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

On note G le milieu du segment $[IK]$ et Ω le point défini par $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{2}{3} \overrightarrow{KB}$.

1. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \right)$
Donc $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} - \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BD}$
Finalement, on obtient : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BA}$.

2. L'espace est rapporté au repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

a. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BA}$ donc $G(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$

$A(0; 0; 1), B(0; 0; 0), C(1; 0; 0), D(0; 1; 0)$

b. Calculer les coordonnées de Ω .

$B(0; 0; 0)$ et K milieu de $[CD]$ donc $K(\frac{x_C+x_D}{2}; \frac{y_C+y_D}{2}; \frac{z_C+z_D}{2})$ donc $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$

$\overrightarrow{\Omega B} = \frac{2}{3} \overrightarrow{KB}$ donc :
$$\begin{cases} x_B - x_\Omega = \frac{2}{3}(x_B - x_K) \\ y_B - y_\Omega = \frac{2}{3}(y_B - y_K) \\ z_B - z_\Omega = \frac{2}{3}(z_B - z_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_\Omega = \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2}) \\ -y_\Omega = \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2}) \\ -z_\Omega = \frac{2}{3} \times (0 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Omega = \frac{1}{3} \\ y_\Omega = \frac{1}{3} \\ z_\Omega = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\Omega(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$

c. Justifier qu'une représentation paramétrique de (AG) est $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Pour $t = 2, x = 0, y = 0$ et $z = 1$. On retrouve les coordonnées du point A donc $A \in d$.

De plus, un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = -4 \overrightarrow{AG}$

On en déduit que les droites d et (AG) sont parallèles.

Ainsi, d est parallèle à (AG) et $A \in d \cap (AG)$ donc d et (AG) sont confondues et donc la représentation paramétrique donnée est bien une représentation de (AG) .

3. Démontrer que $\Omega \in (AG)$.

Cherchons le paramètre t pour lequel on obtient les coordonnées de Ω pour cela résolvons le système : $\begin{cases} \frac{1}{3} = 2 - t \\ \frac{1}{3} = 2 - t \\ 0 = -5 + 3t \end{cases}$

$\begin{cases} t = 2 - \frac{1}{3} \\ t = 2 - \frac{1}{3} \\ t = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{5}{3} \end{cases}$ en remplaçant t par $\frac{4}{3}$ dans la représentation paramétrique, on obtient les coordonnées de Ω donc $\Omega \in (AG)$