

PREMIÈRES

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

durée : 2h

calculatrices autorisées

Rendre le sujet avec la copie.

NOM :

PRENOM :

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 :

(4 points)

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

1. Question de cours : Démontrer que la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto 2x$.
2. Dériver g .
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_g au point d'abscisse 1.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g .
5. A l'aide de la calculatrice, que peut-on dire de T pour C_f ? Démontrer votre conjecture.

Exercice n°2 :

(7,5 points)

Dans cet exercice, les trois premières questions sont indépendantes

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = -n^2 + 10n + 1$.
Déterminer le sens de variation de (w_n) .

2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}.$$

- a) Donner les trois premiers termes de cette suite.
- b) Démontrer que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.
- c) Sachant la valeur donnée pour u_0 , que peut-on en déduire pour les termes de la suite (u_n) ?
- d) Déterminer le sens de variation de (u_n) .

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{n^2 + 1}{n - 1}$.

- a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de l'expression $A = \frac{x^2 - x - 2}{x(x - 1)}$.
- b) À partir de quel rang la suite (v_n) est-elle définie ?
- c) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n .
- d) En déduire le sens de variation de (v_n) .

4. Conjecturer les limites des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Exercice n°3 :**(5 points)**

On rappelle que dans un repère orthonormé, la distance entre deux points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ est donnée par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé du plan $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

Soit le point M du cercle, image du réel $\frac{\pi}{6}$ par enroulement de la droite des réels, et le point H milieu de [IM].

1. Déterminer les coordonnées de M et de I dans le repère $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$?

2. En déduire la distance IM.

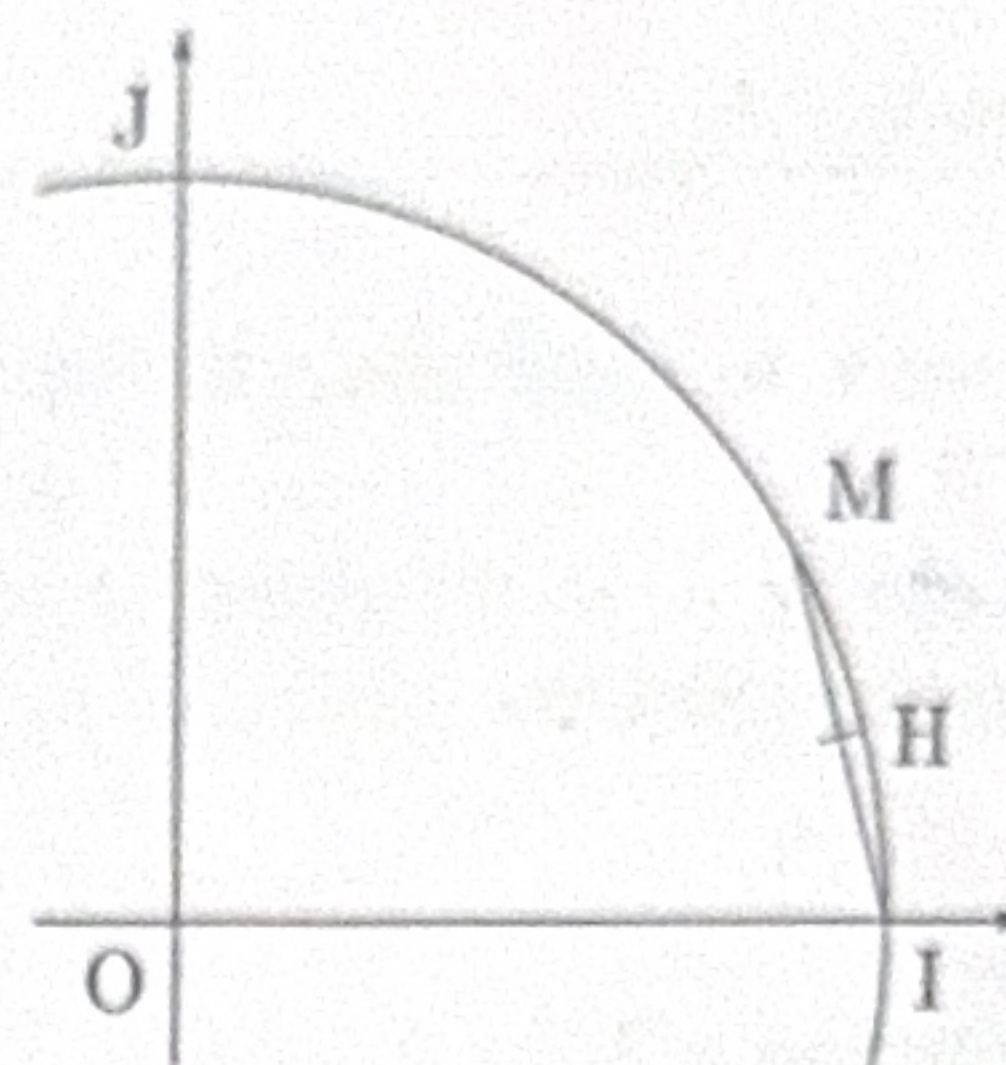
3. a) Donner, sans justifier, la nature des triangles OMI et OHI.

b) Démontrer que $IM = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

c) En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

5. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

**Exercice n°4 : Variations de niveau sonore****(3,5 points)**

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 80 + 20 \cos(4\pi t)$.

1. Étudier la parité de f .

2. Démontrer que f est périodique de période 0,5.

Partie B : Le niveau sonore N (en décibels) d'une sirène est modélisé par : $N(t) = 80 - 20 \sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ où t est le temps en seconde.

1. Montrer que $N(t) = f(t)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Résoudre $f(t) = 70$ sur $\mathbb{R}$.

Bonus : En déduire les solutions de $N(t) = 70$ sur $[0; 1]$ et interpréter le résultat.