

Nom Prénom : NGUYEN-KHAC Mathis

T9 – Spé Maths

Dérivation - convexité des fonctions
Logarithme népérien

07/01/2025

Durée : 1h

Calculatrice non autorisée

Cours (4 points)

Démontrer que pour tout $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ ✓

Exercice 1 (6 points)

Voici le tableau de variations de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $[-8; 7]$.

x	-8	2	4	7
f'	2	5	0	1

- En déduire le sens de variation de f .
- Déterminer la convexité de f .
- Tracer l'allure d'une courbe pouvant représenter f . ✓

Exercice 2 (6 points)

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x+1)^3(x+2)$ représentée par $\mathcal{C}$.
Etudier la convexité de φ et les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}$. ✗

Exercice 3 (6 points)

1 – Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs :

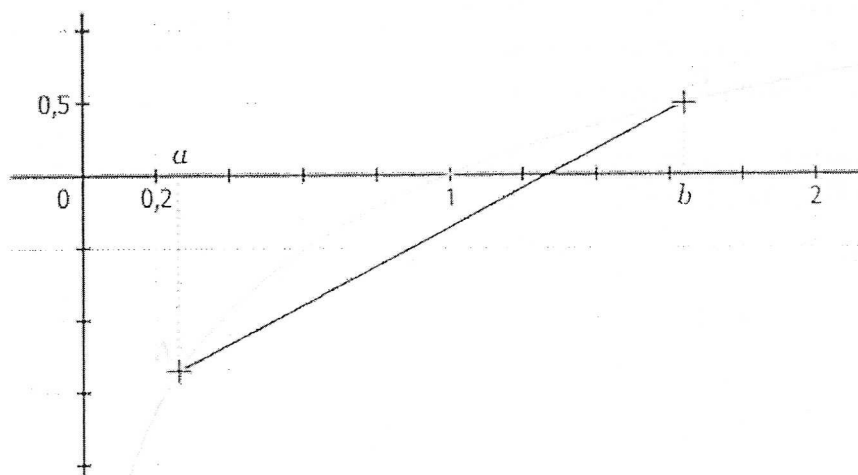
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Aide : on pourra considérer l'expression $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

2 – En déduire que pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))$$

3 – Quelle propriété de la fonction $\ln$ venez-vous de démontrer ? Expliquer, éventuellement à l'aide du graphique ci-dessous représentant la fonction $\ln$:



Nom Prénom :

T9 – Spé Maths

Dérivation - convexité des fonctions
Logarithme népérien

07/01/2025

Durée : 1h

Calculatrice non autorisée

Exercice 4 (8 points)

Préciser l'ensemble de dérivation et la dérivée des fonctions définies de la façon suivante (on simplifiera l'expression de la dérivée au maximum) :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$$

$$g(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$$

$$h(x) = \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^4$$

$$k(x) = \ln(x^4 - 2x^2 + 1)$$

Exercice 5 (4 points)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$e^{\frac{3x+2}{-x+5}} = 10$$

$$\ln(x^2 - 1) \geq 0$$

Exercice 6 (8 points)

Ecrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

$$A = \ln(3) + \ln(27) + \ln(81)$$

$$B = \ln((2^5)^3)$$

$$C(x) = \ln(x^3 - x^2) - \ln(x - 1) \text{ pour } x > 1$$

$$D(x, y) = \ln(x^2 y) - 2 \ln(y^5 \sqrt{x}) + \ln(y^9) \text{ pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Exercice 7 (8 points)

On considère une fonction k pour laquelle il existe trois nombres réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ et dont le tableau de variations est donné ci-après.

1. Quel est le signe de a ? Justifier.
2. Que peut-on dire du discriminant de $ax^2 + bx + c$?
3. Déterminer la dérivée de k en fonction de a , b et c .
4. À l'aide du tableau de variations, déterminer les valeurs de a , b et c .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
k	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$