

Solution n°1 :**Partie A**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. $f : t \mapsto (at+b)e^t$. f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme produit de fonctions dérivables. f est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0 ; 1]$ si, et seulement si $f'(t) = g(t)$, $\forall t \in [0 ; 1]$.

$$\forall t \in [0 ; 1], \quad f'(t) = ae^t + (at+b)e^t = (at+a+b)e^t.$$

$$\text{Par identification, on a } \begin{cases} a = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{f(t) = (2-t)e^t, \quad \forall t \in [0 ; 1]}$$

$$\text{D'où, } u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \int_0^1 f'(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0) = e - 2$$

$$\boxed{u_1 = e - 2}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$.

On pose :

$\varphi_{n+1}(t) = (1-t)^{n+1} e^t$. φ_{n+1} est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme produit et composée de fonctions dérivables,

$\varphi'_{n+1}(t) = -(n+1)(1-t)^n e^t + (1-t)^{n+1} e^t$ sur $[0 ; 1]$.

Par passage à l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'_{n+1}(t) dt &= -(n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt + \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ \iff \left[\varphi_{n+1}(t) \right]_0^1 &= -(n+1)u_n + u_{n+1} \\ \iff 0 - 1 &= -(n+1)u_n + u_{n+1} \\ \iff u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R)

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) .

1. On a $0 \leq t \leq 1$, donc $1-t \geq 0$, $(1-t)^n \geq 0$ et $1 \leq e^t \leq e$ car la fonction exponentielle est croissante sur $[0 ; 1]$.

Donc $(1-t)^n e^t \geq 0$. Or l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ est positive d'après le théorème de la positivité. On en déduit que $u_n \geq 0$ pour tout n non nul.

2. (a) On a vu que, pour tout n non nul, $0 \leq t \leq 1 \implies e^t \leq e \implies (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$ car $(1-t)^n \geq 0$, $\forall t \in [0 ; 1]$.

(b) D'après le théorème de comparaison des intégrales sur $[0 ; 1]$, on a

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e(1-t)^n dt, \quad \text{pour tout } n \text{ non nul. soit, } u_n \leq \int_0^1 e(1-t)^n dt, \quad \text{pour tout } n \text{ non nul.}$$

$$\int_0^1 e(1-t)^n dt = \left[-\frac{e}{n+1} \times (1-t)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

$$\text{D'où, } u_n \leq \frac{e}{n+1}, \quad \text{pour tout } n \text{ non nul.}$$

3. On a donc démontré au 1. et au 2. b. que pour tout n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Par application du théorème des « gendarmes », la limite de u_n au voisinage de $+\infty$ est égale à zéro. La suite (u_n) converge donc vers 0.

Solution n°2 :

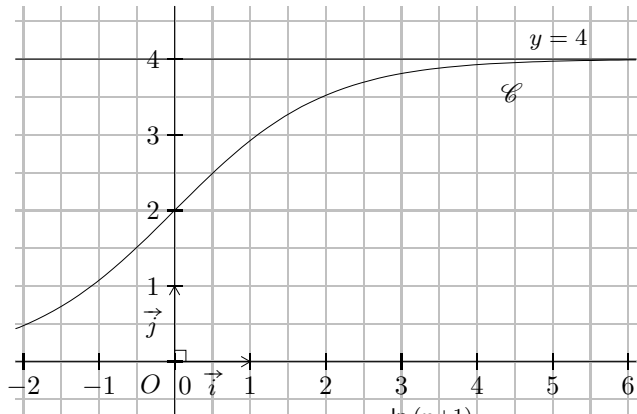
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{4e^t}{e^t + 1},$$

et sa courbe $\mathcal{C}$ représentée ci-contre.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt.$$



1. a) De manière évidente, f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi, $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt$ représente l'aire (en unités d'aire) du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$.

- b) Pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{4e^t}{e^t + 1} dt = \left[4 \ln |e^t + 1| \right]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = 4 \ln |e^{\ln(n+1)} + 1| - 4 \ln |e^{\ln n} + 1| = 4 \ln \frac{n+2}{n+1}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = 4 \ln \frac{n+2}{n+1}$$

2. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

En utilisant la relation de Chasles,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} f(t) dt = \int_0^{\ln 2} f(t) dt + \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t) dt + \cdots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt = \int_0^{\ln(n+1)} f(t) dt$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ donc S_n représente l'aire (en unités d'aire) du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

D'après la question 1)b), $S_n = 4 \ln \frac{3}{2} + 4 \ln \frac{4}{3} + \cdots + 4 \ln \frac{n+2}{n+1} = 4 \ln \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1} \right)$

D'où,
$$S_n = 4 \ln \frac{n+2}{2}$$

3. a) L'aire $\mathcal{A}(n)$ (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, et les droites d'équations $y = 4$, $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$ est $\mathcal{A}(n) = \int_0^{\ln(n+1)} |4 - f(t)| dt$.

Mais sur $\mathbb{R}$, $e^t \leq e^t + 1 \implies \frac{e^t}{e^t + 1} \leq 1 \implies f(t) \leq 4$

D'où, $\mathcal{A}(n) = \int_0^{\ln(n+1)} (4 - f(t)) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\mathcal{A}(n) = \int_0^{\ln(n+1)} 4 dt - \int_0^{\ln(n+1)} f(t) dt = 4 \ln(n+1) - S_n = 4 \ln(n+1) - 4 \ln \frac{n+2}{2} = 4 \ln \frac{2(n+1)}{n+2}$$

- b) Un calcul simple donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2$ par quotient.

Comme $\lim_{X \rightarrow 2} 4 \ln X = 4 \ln 2 = \ln 16$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(n) = \ln 16$ par composée.

Solution n°3 : Soit x un réel positif. On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1} dt$.

1. a. On sait que la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0. On a donc $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x positif, $x + 1$ est strictement positif et $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.

- b. On a $f(2) = \int_1^2 \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_1^2 1 dt$ par comparaison d'intégrales en utilisant le résultat de la question précédente

$$\text{Or, } \int_1^2 1 dt = \left[t \right]_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Ainsi, $f(2) \geq 1$

2. a. On sait que la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul.

La fonction f est donc la primitive définie sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$, qui s'annule en 1. Par définition d'une primitive, f est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

- b. Puisque $f(1) = 0$, $f(2) \geq 1$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [1 ; 2]$ tel que $f(c) = 1$

- c. f étant la primitive définie sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$, qui s'annule en 1, on a $f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Il est clair que $\frac{e^x}{x+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit que f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}^+$.

- d. D'après la question 1.a., pour tout réel $t \geq 1$, $\frac{e^t}{t+1} \geq 1$.

Puisque $x \geq 1$, par comparaison d'intégrales (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on a

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_1^x 1 dt$$

$$\text{Or, } \int_1^x 1 dt = \left[t \right]_1^x = x - 1.$$

Donc, pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq x - 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par comparaison

Solution n°4 :

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. a) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$.

* f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in [0 ; 1]$.

* $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) - \ln 1$

$u_0 = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right)$.

b) $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

$u_1 = \sqrt{2} - 1$.

2. a) * Prouvons que la suite u est décroissante :

Soit $n > 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{Linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

Mais sur $[0 ; 1]$, $0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ (on multiplie par x^n) donc $x^{n+1} - x^n \leq 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$.

Ainsi, $\frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$ sur $[0 ; 1]$, d'où $\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq 0$

On a donc $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n > 0$ (il est clair que $u_0 = \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) > \sqrt{2} - 1 = u_1$).

La suite u est décroissante.

* $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ sur $[0 ; 1]$ donc $u_0 \geq 0$ d'après le théorème de la positivité.

$\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ sur $[0 ; 1]$ pour tout $n > 0$ donc $u_n \geq 0$ pour tout $n > 0$ d'après le théorème de la positivité.

On en déduit que la suite u est minorée par 0.

* La suite u est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite u converge vers un réel ℓ .

$$\begin{aligned}
 \text{b) } * \quad & 0 \leq x \leq 1 \\
 \iff & 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
 \iff & 1 \leq 1 + x^2 \leq 2 \\
 \iff & 1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2} \quad \text{car la fonction racine-carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

* Soit $n > 1$ et $x \in [0 ; 1]$,

$$\begin{aligned}
 & 1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2} \\
 \iff & 1 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
 \iff & x^n \geq \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} \geq \frac{x^n}{\sqrt{2}} \quad \text{car } x^n \geq 0 \text{ sur } [0 ; 1] \\
 \iff & \int_0^1 x^n dx \geq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} dx \geq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \quad \text{d'après le théorème de comparaison des intégrales} \\
 \iff & \int_0^1 x^n dx \geq u_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Mais, } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$$* \text{ Il est clair que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'après le théorème des « gendarmes », $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Solution n°5 :

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(t) = 1 - \ln t$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 1 - \ln t = 0 \iff \ln t = 1 \iff t = e \\
 & 1 - \ln t \geq 0 \iff \ln t \leq 1 \iff t \leq e
 \end{aligned}$$

t	0	e	$+\infty$
$h(t)$	$ $	+	0 -

2. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(t) = t(1 - \ln t)$.

a) g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$g'(t) = 1 \times (1 - \ln t) + t \times \left(-\frac{1}{t}\right) = 1 - \ln t - 1 = -\ln t \implies g'(t) = -\ln t \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

b) h est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc h admet des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

Comme $h(t) = 1 + g'(t)$ sur $]0 ; +\infty[$, on a $H(t) = t + g(t) + k = t + t(1 - \ln t) + k = 2t - t \ln t + k$

$H(t) = 2t - t \ln t + k$ sur $]0 ; +\infty[$ où k est une constante réelle.

$$\text{De plus, } H(e^2) = 0 \iff 2e^2 - e^2 \ln e^2 + k = 0 \iff 2e^2 - e^2 \times 2 + k = 0 \iff k = 0.$$

$H(t) = 2t - t \ln t$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} 1 - \ln t dt$.

a) Soit $n \geq 0$. $0 < e^{-(n+1)} \leq e^{-n} \leq 1 \leq e$. D'après la question 1.a), $h(t) \geq 0$ sur $]0 ; e]$. D'après le théorème

de la positivité, $\int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} 1 - \ln t dt \geq 0$.

Ainsi, $v_n \geq 0$ pour tout entier n .

b) Soit $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 v_n &= \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} 1 - \ln t \, dt \\
 &= \left[H(t) \right]_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} \\
 &= \left(2e^{-n} - e^{-n} \ln e^{-n} \right) - \left(2e^{-(n+1)} - e^{-(n+1)} \ln e^{-(n+1)} \right) \\
 &= \left(2e^{-n} + ne^{-n} \right) - \left(2e^{-(n+1)} + (n+1)e^{-(n+1)} \right) \\
 &= (n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$v_n = (n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)} \text{ pour tout entier } n.$$

c) On va utiliser les limites du cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$$\text{Au voisinage de } +\infty, v_n = \frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n} - e^{-1} \times \left(\frac{n}{e^n} + \frac{3}{e^n} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ par inverse } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ par somme, produit et inverse}$$

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

a) Soit $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\
 &= (2 - 3e^{-1}) + (3e^{-1} - 4e^{-2}) + \dots + ((n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}) \\
 &= 2 - (n+3)e^{-(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } S_n = 2 - (n+3)e^{-(n+1)} \text{ pour tout entier } n.$$

b) Au voisinage de $+\infty$, $S_n = 2 - e^{-1} \times \left(\frac{n}{e^n} + \frac{3}{e^n} \right)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ par inverse } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0 \text{ par somme, produit et inverse}$$