

Intégration

Exercices corrigés

Exercice 1 : (solution)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

- Déterminer les réels a et b tels que la fonction $f : t \mapsto (at+b)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0 ; 1]$. En déduire la valeur de u_1 .
- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R)

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) .

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.
- (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n.$$

(b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 : (solution)

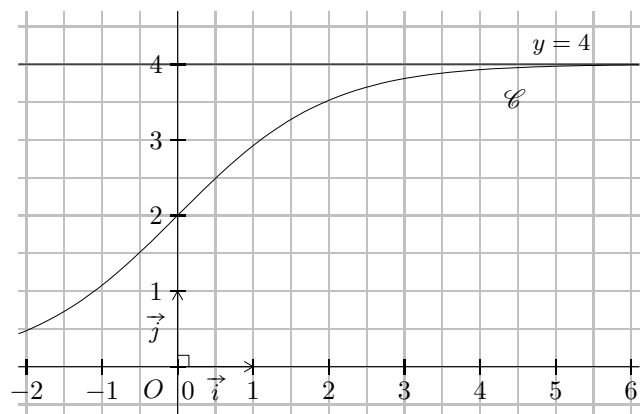
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{4e^t}{e^t + 1},$$

et sa courbe $\mathcal{C}$ représentée ci-contre.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt.$$



- À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, donner une interprétation géométrique de u_n .
 - Établir que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 4 \ln \frac{n+2}{n+1}$.
- On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
Donner une interprétation de S_n et déduire du 1°) b) une expression simple de S_n .
- Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}(n)$ du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, et les droites d'équations $y = 4$, $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.
 - Déterminer la limite de $\mathcal{A}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : (solution)

Soit x un réel positif. On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1} dt$.

1. a. Montrer que pour tout réel x positif, $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.
b. En déduire que $f(2) \geq 1$.
2. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
b. En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[1 ; 2]$ tel que $f(c) = 1$.
c. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est croissante.
d. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq x - 1$.
En déduire la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : (solution)

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. a) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
Calculer la dérivée f' de f . En déduire u_0 .
b) Calculer u_1 .
2. a) Prouver que la suite u est décroissante. En déduire que la suite u est convergente.
b) Montrer que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
Déterminer la limite de u .

Exercice 5 : (solution)

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(t) = 1 - \ln t$.

1. Étudier le signe de $h(t)$ sur $]0 ; +\infty[$.
2. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(t) = t(1 - \ln t)$.
a) Déterminer $g'(t)$.
b) En déduire la primitive H de h sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en e^2 .
3. On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} 1 - \ln t dt$.
a) Justifier que, pour tout entier n , on a $v_n \geq 0$.
b) Calculer v_n en fonction de n .
c) Déterminer la limite de v .
4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
a) Exprimer S_n en fonction de n .
b) Déterminer la limite de S .