

Correction – Interrogation n°2 – Sujet A

Calculatrice interdite

1. Dans chaque cas, déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a. $g(x) = 5e^{-3x^2+4x-1}$

$g(x) = 5e^{u(x)}$

où $\begin{cases} u(x) = -3x^2 + 4x - 1 \\ u'(x) = -6x + 4 \end{cases}$

$g'(x) = 5 \times e^{u(x)} \times u'(x)$

$= 5(-6x + 4)e^{-3x^2+4x-1}$

b. $h(x) = \sqrt{8e^x - 4x^6}$

$h(x) = \sqrt{u(x)}$

où $\begin{cases} u(x) = 8e^x - 4x^6 \\ u'(x) = 8e^x - 24x^5 \end{cases}$

$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$= \frac{8e^x - 24x^5}{2\sqrt{8e^x - 4x^6}}$

$= \frac{4e^x - 12x^5}{\sqrt{8e^x - 4x^6}} = \frac{2(2e^x - 6x^5)}{\sqrt{4(2e^x - x^6)}} = \frac{2e^x - 6x^5}{\sqrt{2e^x - x^6}}$

2 pts

2 pts

2. Soient u et v les fonctions définies par $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = \frac{x}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction $v \circ u$.

$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x + 3) = \frac{2x + 3}{2 - (2x + 3)} = \frac{2x + 3}{-2x - 1}$

1,5 pt

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x^2 + 6x - 10)^3$.

- a. Déterminer $f'(x)$ et justifier $f'(x)$ est du même signe que $-2x + 6$.

$f(x) = u(x)^n$

où $\begin{cases} u(x) = -x^2 + 6x - 10 \\ u'(x) = -2x + 6 \end{cases}$ et $n = 3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = n \times u(x)^{n-1} \times u'(x)$

$= \underbrace{3}_{>0} \times \underbrace{(-x^2 + 6x - 10)^2}_{\geq 0} \times (-2x + 6)$

2 pt

Or, $3 > 0$ et $(-x^2 + 6x - 10)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'un carré.

Donc $f'(x)$ est du même signe que $-2x + 6$. 1 pt

Pour aller plus loin, montrons que $(-x^2 + 6x - 10)^2 > 0$:

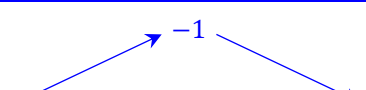
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 36 - 40 = -4$

$\Delta < 0$ donc $-x^2 + 6x - 10$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(x)$ est **strictement** du même signe que $-2x + 6$.

- b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$-2x + 6 > 0 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < 3$

Ainsi, d'après la q°3a :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

$f(3) = (-3^2 + 6 \times 3 - 10)^3 = (-1)^3 = -1$

1,5 pt

Correction – Interrogation n°2 – Sujet B

Calculatrice interdite

1. Dans chaque cas, déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a. $g(x) = \sqrt{1 - 3x^4 + 2e^x}$

$g(x) = \sqrt{u(x)}$

où $\begin{cases} u(x) = 1 - 3x^4 + 2e^x \\ u'(x) = -12x^3 + 2e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{-12x^3 + 2e^x}{2\sqrt{1 - 3x^4 + 2e^x}} \\ &= \frac{-6x^3 + e^x}{\sqrt{1 - 3x^4 + 2e^x}} \end{aligned}$$

2 pts

b. $h(x) = -7e^{3x^3-2}$

$h(x) = -7e^{u(x)}$

où $\begin{cases} u(x) = 3x^3 - 2 \\ u'(x) = 9x^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -7 \times e^{u(x)} \times u'(x) \\ &= -7 e^{3x^3-2} \times 9x^2 \\ &= -63 x^2 e^{3x^3-2} \end{aligned}$$

2 pts

2. Soient u et v les fonctions définies par $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \frac{-x}{x+4}$

Déterminer l'expression de la fonction $v \circ u$.

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 1) = \frac{-(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + 4} = \frac{-x^2 + 1}{x^2 + 3}$$

1,5 pt

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + 8x - 9)^3$.

- a. Déterminer $f'(x)$ et justifier $f'(x)$ est du même signe que $-4x + 8$.

$f(x) = u(x)^n$

où $\begin{cases} u(x) = -2x^2 + 8x - 9 \\ u'(x) = -4x + 8 \end{cases}$ et $n = 3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \times u(x)^{n-1} \times u'(x) \\ &= \underbrace{3}_{>0} \times \underbrace{(-2x^2 + 8x - 9)^2}_{\geq 0} \times (-4x + 8) \end{aligned} \quad \text{2 pts}$$

Or, $3 > 0$ et $(-2x^2 + 8x - 9)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'un carré.

Donc $f'(x)$ est du même signe que $-4x + 8$. 1 pt

Pour aller plus loin, montrons que $(-2x^2 + 8x - 9)^2 \geq 0$:

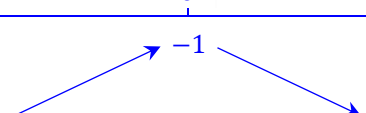
$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-9) = 64 - 72 = -8$$

$\Delta < 0$ donc $-2x^2 + 8x - 9$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(x)$ est **strictement** du même signe que $-4x + 8$.

- b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$$-4x + 8 > 0 \Leftrightarrow -4x > -8 \Leftrightarrow x < 2$$

Ainsi, d'après la q°3a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

$$f(2) = (-2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 9)^3 = (-1)^3 = -1$$

1,5 pt