



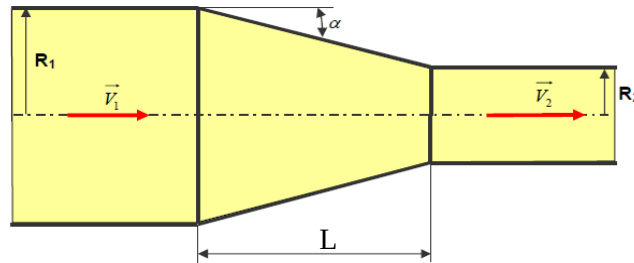
U.E. SA04U060 - Physique

Enoncés des travaux dirigés de Dynamique des Fluides

N.B. : Les exercices traités en séance d'ED et qui sont donc à préparer avant chaque séance sont ceux dont l'intitulé est surligné : Exercice X.

Exercice 1

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait et incompressible dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent de longueur L caractérisé par l'angle α (voir schéma ci-dessous).



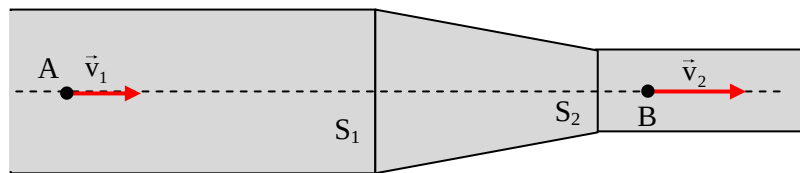
1. La conduite a une section circulaire de rayon variable. Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).
2. Exprimer ($R_1 - R_2$) en fonction de L et α . En déduire la longueur L sachant que $R_1 = 50 \text{ mm}$ et $\alpha = 15^\circ$.

Exercice 2

On considère une conduite de section S_1 qui se rétrécit en une section S_2 (tube de Venturi). De l'eau, assimilée à un fluide parfait et incompressible circule dans cette conduite. L'écoulement est stationnaire. Soit deux points A et B dans le fluide, sur une même ligne de courant et distants de L .

On donne $S_1 = 80 \text{ cm}^2$; $S_2 = 20 \text{ cm}^2$; $L = 10 \text{ m}$; $p_A = p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $v_1 = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

1. La conduite est horizontale. Calculer la vitesse v_2 et la pression p_2 de l'eau au point B.

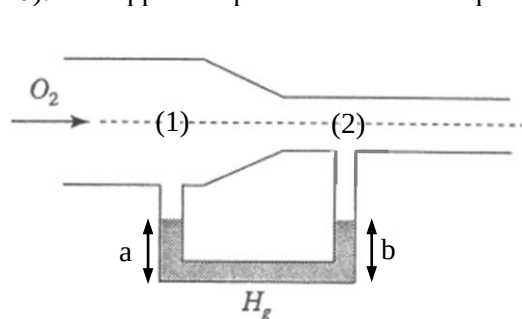


2. La conduite est maintenant inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale et telle que l'altitude du point A soit supérieure à celle du point B. Le débit est inchangé. Calculer les nouvelles valeurs des vitesse et pression de l'eau en B si la pression en A est quasiment inchangée.

Exercice 3

Un tube de Venturi horizontal de sections S_1 et S_2 ($S_1 > S_2$) schématise un inhalateur à dioxygène (gaz assimilé à un fluide parfait de faible masse volumique constante ρ_0). Un tube fin en U reliant les sections (1) et (2) contient un peu de mercure de masse volumique ρ ($\rho \gg \rho_0$).

A chaque instant, on note (a) le niveau de mercure dans la branche de gauche du tube en U et (b) celui dans la branche de droite (voir schéma). On supposera que l'écoulement est permanent.

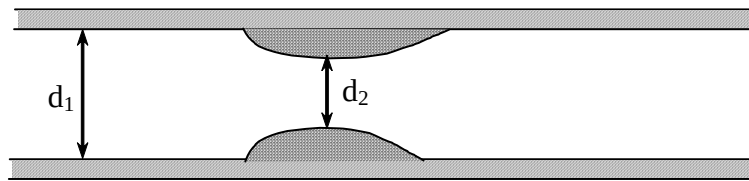


1. A chaque inspiration, quand le dioxygène s'écoule de (1) vers (2), les niveaux a et b du mercure présentent une dénivellation h entre eux. Si P_1 et P_2 sont les pressions en (1) et (2), exprimer $P_1 - P_2$ en fonction des données.
2. En déduire le débit de dioxygène en fonction de S_1 , S_2 , ρ , ρ_0 , g et h . Peut-on graduer une branche du tube en U afin de mesurer directement le débit ?

3. Comment le débit varie-t-il si la section S_2 est remplacée par 5 sections égales en parallèle, chacune ayant un rayon 5 fois plus petit que celui de S_2 (la vitesse d'inspiration en (2) est supposée rester constante) ? Comment la vitesse v_1 en (1) varie-t-elle dans ces conditions ?

Exercice 4

Le cylindre horizontal de la figure ci-après représente une artère partiellement obstruée par suite d'un épaissement de la paroi artérielle (plaque d'athérosclérose).



En dehors de la région de rétrécissement cylindrique, le diamètre moyen de cette artère est $d_1 = 1 \text{ cm}$. Le sang y circule avec une vitesse moyenne $v_1 = 20 \text{ cm.s}^{-1}$. La pression hydrostatique relative (pression de jauge) y régnant est $p_1 = P_1 - P_0 = 100 \text{ mm Hg}$ ($P_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mm Hg}$).

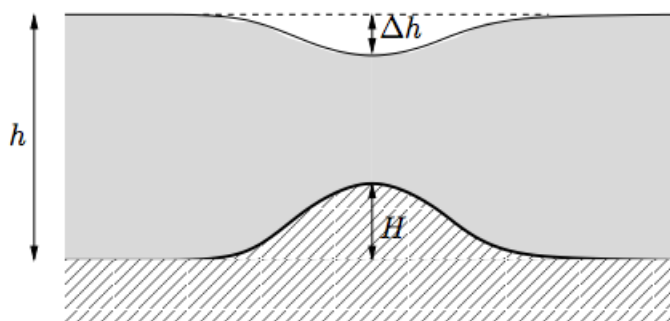
Le sang est assimilé à un fluide parfait de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Soit d_2 le diamètre du rétrécissement. Calculer la valeur minimale $d_{2\min}$ de d_2 , compatible avec un écoulement permanent en deçà de laquelle la pression hydrostatique absolue P_2 devient inférieure à la pression P_0 . On commencera par exprimer $d_{2\min}$ en fonction de d_1 , p_1 , v_1 et ρ avant de faire l'application numérique.

Exercice 5

Dans une rivière de vitesse d'écoulement faible et de largeur L constante, si la hauteur du fond augmente localement de H , on peut observer une baisse locale Δh du niveau de l'eau (cf schéma ci-après).

On supposera que l'eau est un fluide parfait et incompressible (de masse volumique ρ), et l'écoulement permanent. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.



1. Expliquer le plus simplement possible pourquoi la surface ne peut pas rester plate.
2. Si la rivière a un débit volumique J_V pour une largeur L , on note $q = J_V/L$ son débit par unité de largeur.
 - a) Exprimer v_B la vitesse de l'eau au niveau du rétrécissement en fonction de la vitesse v_A de l'eau au niveau de la partie la plus profonde, de h , H et Δh . Faire l'application numérique pour $h = 2 \text{ m}$, $H = 40 \text{ cm}$ et $\Delta h = 20 \text{ cm}$.
 - b) Trouver une autre relation liant v_A et v_B , et faisant intervenir g et Δh . En déduire la valeur du débit de la rivière par unité de largeur, q .

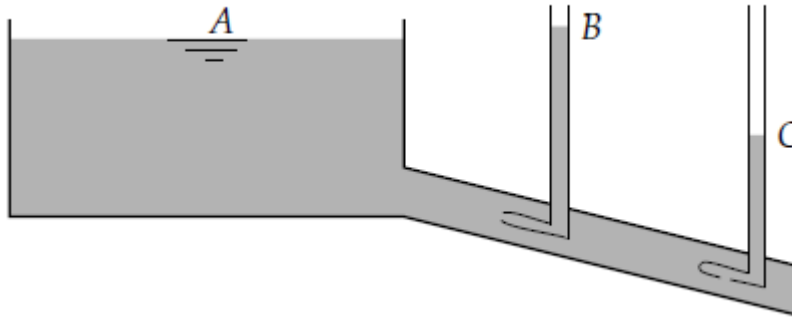
Exercice 6

Une conduite d'évacuation est reliée au fond d'un réservoir. La vitesse de l'eau dans la conduite est mesurée à l'aide d'un ensemble constitué d'une sonde de Pitot statique (à droite sur le schéma) et d'une sonde de Pitot d'arrêt (à gauche sur le schéma). On suppose l'écoulement permanent, le fluide incompressible et parfait. La section du réservoir est supposée très grande devant celle de la conduite.

On prendra pour la pesanteur terrestre : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Exprimer le niveau d'eau dans chacun des tubes placés au-dessus des sondes de Pitot en fonction du niveau d'eau dans le réservoir et de la vitesse v de l'eau dans la conduite. On pourra introduire les côtes z_A , z_B , z_C des 3 surfaces libres, l'origine O de l'axe Oz , vertical ascendant, n'ayant pas d'importance.

2. La différence de niveau d'eau entre la sonde statique et la sonde d'arrêt est $h = 20$ cm. Quelle la vitesse v de l'écoulement dans la conduite ?



3. Quelle est la différence de niveau entre la surface libre du réservoir et l'extrémité aval de la conduite ? Conclure sur la pertinence de l'expérience pour la détermination de la valeur de v .

Exercice 7

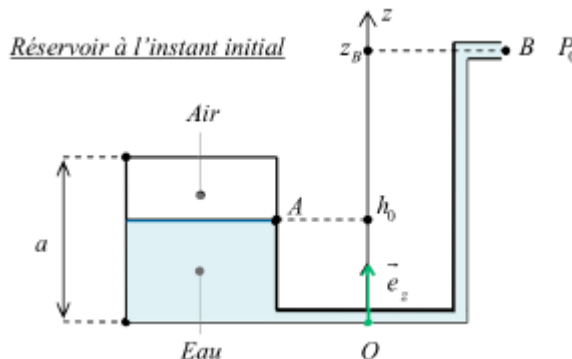
Un réservoir cubique d'arête a est rempli à température constante avec de l'air à la pression atmosphérique P_0 . Une quantité d'eau de masse volumique ρ ($\rho = \text{constante}$) est introduite ensuite de façon à ce que la pression du gaz dans l'enceinte soit égale à $3P_0$. On obtient ainsi une hauteur d'eau h_0 dans le réservoir. A l'instant initial, le réservoir est raccordé à un tube vertical de petit diamètre d ($d \ll a$). L'orifice de sortie de la conduite est à la pression P_0 .

On définit un axe Oz avec l'origine située au fond du réservoir et un vecteur unitaire $\vec{e}_z$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Un point A de la surface libre de l'eau du réservoir est repéré par son abscisse z_A . La sortie de la conduite est située au point B d'abscisse z_B ($z_B > 0$).

L'écoulement du fluide est parfait et permanent.

On donne : $a = 1$ m ; $P_0 = 10^5$ Pa ; $g = 10$ m.s⁻² ; $\rho = 10^3$ kg.m⁻³.

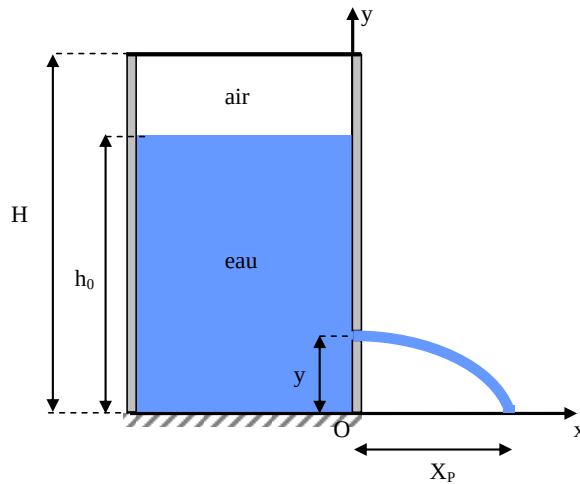


1. Exprimer la hauteur d'eau h_0 en fonction de a .
2. Quelle condition doit vérifier z_B pour qu'un écoulement soit possible à l'instant initial ?
3. On admet que la condition sur z_B est vérifiée pour $z_B = 8$ m.
 - 3.1. Déterminer la vitesse v_B de l'écoulement au point B en fonction de z_A .
 - 3.2. Calculer la vitesse du fluide en B à l'instant initial.
 - 3.3. Quel volume d'eau disponible V_d s'écoule au point B ?

Exercice 8

Un grand réservoir cylindrique fermé, de hauteur $H = 2,50$ m, contient initialement de l'eau (assimilée à un fluide parfait) sur une hauteur $h_0 = 1,80$ m, surmontée d'air à la pression initiale $11P_0/10$, P_0 étant la pression atmosphérique à l'extérieur du réservoir ($P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa).

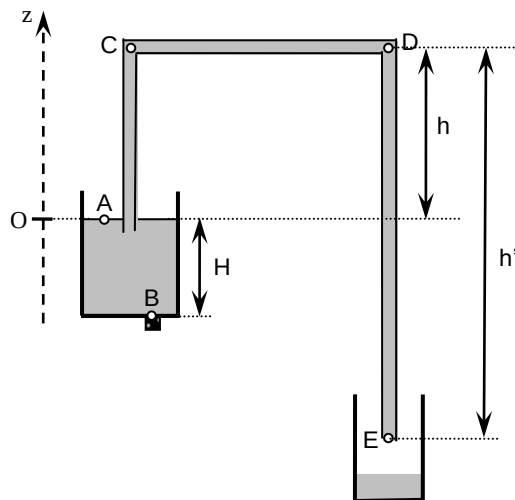
On perce la surface latérale du réservoir d'un petit orifice circulaire de rayon $r \ll R$ et situé à la distance $y = 0,40$ m du fond du réservoir. Le système est maintenu à température constante. On prendra pour la pesanteur terrestre, $g = 10$ m.s⁻².



1. Exprimer puis calculer la vitesse v_0 d'éjection initiale de l'eau par l'orifice.
2. Pendant l'écoulement de l'eau, l'air au-dessus de l'eau se détend. Calculer la vitesse v_1 d'éjection de l'eau par l'orifice lorsque la surpression de l'air par rapport à l'extérieur est réduite de moitié.
3. Déterminer l'équation du second degré en h , où h désigne la hauteur d'eau qui reste dans le réservoir au moment où l'eau cesse de s'écouler. Calculer h .
4. Quelle aurait dû être la cote $y = y_0$ du trou pour que la portée X_p du jet d'eau initial soit maximale ?
5. Calculer cette portée maximale, $X_{p,\max}$ et la vitesse v_e d'éjection correspondante.

Exercice 9

Soit le dispositif présenté ci-dessous :



- Dans un premier temps, on ne considère qu'une cuve remplie d'eau et fermée à sa base par un bouchon (en B) de section s ($s \ll S_A$ avec $S_A =$ section de la cuve).
On considère la hauteur H , telle que $H = z_A - z_B$, comme pratiquement constante.
 - On enlève le bouchon en B. En appliquant le théorème de Bernoulli, trouver une relation entre les vitesses du fluide en A et en B, respectivement V_A et V_B , H et g .
 - Démontrer que si $s \ll S_A$, $V_B = \sqrt{2gH} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$ où l'on définira la quantité ε .
On rappelle que $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0.
- On remplit de nouveau la cuve d'une hauteur H d'eau avec le bouchon en place en B. On installe de plus un tube en U de section s à l'envers afin de constituer un siphon.
1. Donner l'expression de la vitesse en E.
 2. En déduire une condition de fonctionnement du siphon.
 3. Quelle est la valeur maximale de h' pour que le siphon fonctionne correctement ?
 4. Donner l'expression du débit maximal du siphon.

Exercice 10

Un vase cylindrique de section S est fermé à sa partie supérieure par un couvercle plan muni d'un robinet R et laissant passer la branche ED d'un siphon $EDFG$. Ce vase renferme de l'eau dont le niveau MN est à une distance h du couvercle et à une hauteur H au-dessus du robinet R' situé à l'extrémité du siphon. (voir schéma ci-après)

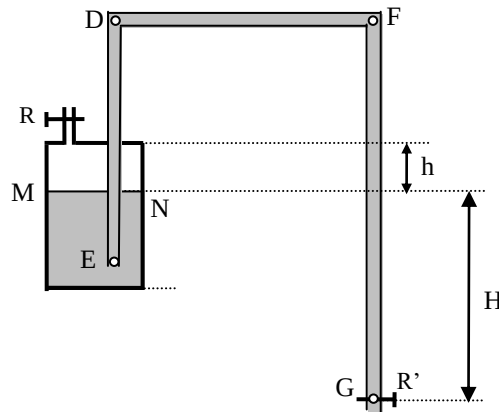
Le siphon étant rempli d'eau et le robinet R' étant fermé, on ouvre un court instant le robinet R et on le referme. La pression au-dessus du liquide est alors égale à la pression atmosphérique, notée p_{atm} .

On admettra que la section du siphon est négligeable devant celle du vase.

On ouvre le robinet R' et on laisse l'eau s'écouler.

Données : $S = 100 \text{ cm}^2$; $h = 0,10 \text{ m}$; $H = 2,0 \text{ m}$; accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; pression atmosphérique $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1. Soit x l'abaissement du niveau MN à un instant donné et p la pression de l'air dans la partie supérieure du vase. On suppose la température constante pendant l'écoulement et on considère l'air comme un gaz parfait. Exprimer la pression p en fonction de x , h et p_{atm} .
2. Lorsque l'eau s'arrête de couler (le robinet R' étant toujours ouvert), exprimer la pression p en fonction de x , H , ρ , et p_{atm} .
3. Déterminer numériquement les valeurs de x et p quand l'eau s'arrête de couler.

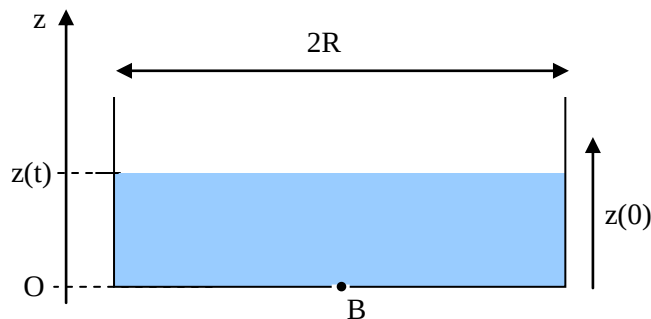


Exercice 11

Un récipient de forme cylindrique ouvert par le haut, de rayon $R = 40 \text{ cm}$, est initialement rempli d'eau de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur mesurée par rapport au fond du récipient $z(0) = \frac{2}{3}R$. La pression

atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau. On ouvre à l'instant $t = 0$, un orifice B circulaire de faible section $s = 1 \text{ cm}^2$ au fond du réservoir cylindrique. On note $z(t)$, la hauteur d'eau dans le réservoir comptée à partir de B , à l'instant t .

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

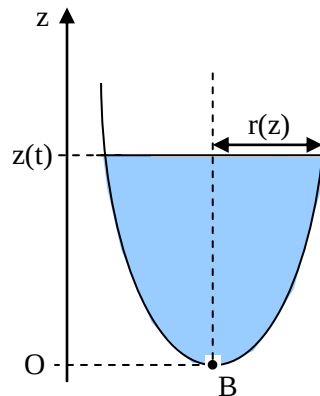


1. Déterminer l'expression de la vitesse de l'eau au point B , soit v_B .
2. Etablir l'équation différentielle en $z(t)$.
3. En déduire l'évolution temporelle de z en fonction de R , s , g et t .
4. Exprimer littéralement puis calculer la durée T de vidange de ce réservoir.

Exercice 12

Soit un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, dont la paroi a pour équation $r(z) = az^n$, où r est le rayon du réservoir en tout point de côte z , comptée à partir de l'orifice circulaire B, de faible section $s = 1 \text{ cm}^2$, percé au fond du réservoir.

Déterminer les coefficients constants a et n pour que la côte du niveau d'eau placée dans le réservoir baisse régulièrement de 6 cm par minute au cours de la vidange.

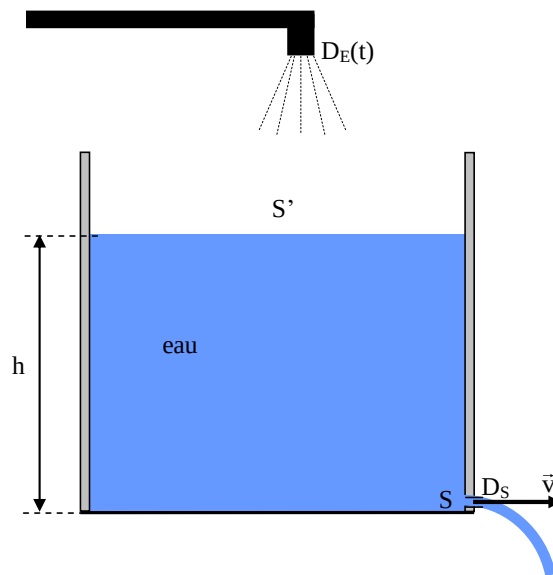


Exercice 13

Une cuve verticale de section constante S' contenant de l'eau (fluide parfait de masse volumique constante ρ) est alimentée par un robinet dont l'ouverture est traversée par un débit volumique $D_E(t)$ réglable.

En bas de la cuve se trouve une conduite d'évacuation (de longueur négligeable) dont la section S est très inférieure à S' . La hauteur de l'eau dans la cuve est notée h .

On notera g l'accélération du champ de pesanteur et P_0 la pression atmosphérique.



A. Régime permanent.

On appelle respectivement v et D_S , la vitesse et le débit volumique à la sortie de la cuve.

1. Déterminer la relation entre v , g et h , dans le cas d'un niveau maintenu constant ($h = \text{cte}$) grâce au débit entrant D_E . On notera que v désigne la vitesse d'éjection immédiatement après la sortie du tube.
2. Exprimer D_S en fonction de h , S et g .
3. Pour une hauteur d'équilibre $h = h_0$, quel doit être le débit d'entrée $D_E = D_{E0}$?

B. Equation dynamique de la hauteur d'eau de la cuve

4. On suppose désormais que h évolue avec le temps ($h = h(t)$). En écrivant de deux façons différentes la variation dV du volume $V(t)$ d'eau dans la cuve entre les instants t et $t + dt$, montrer que $h(t)$ vérifie une équation différentielle du type : $\frac{dh}{dt} + \beta\sqrt{h} = \delta(t)$. On précisera les expressions de β et $\delta(t)$ en fonction de S , S' , g et $D_E(t)$ et on supposera que la relation établie à la question 2 entre D_S , h , S et g reste valable quand h n'est plus constant.

- Quand le robinet est fermé, si la hauteur initiale est h_0 , exprimer le temps nécessaire pour effectuer la vidange de 19% de la cuve, en fonction de β et h_0 , puis en fonction de S , S' , g et h_0 .
- Même question pour la vidange de la totalité de la cuve ?

C. Linéarisation de l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la hauteur d'eau dans la cuve

- On pose : $e(t) = D_E(t) - D_{E0}$ et $z(t) = h(t) - h_0$, les variations finies de débit et de hauteur, au voisinage du point de repos pour lequel la hauteur est h_0 . La variation restera toujours très inférieure à la grandeur elle-même. En considérant que $z(t)$ est un infiniment petit du 1^{er} ordre devant h_0 , montrer que l'équation différentielle linéaire reliant $z(t)$ et $e(t)$ s'écrit : $\frac{dz(t)}{dt} + \frac{z(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{S'}$. On donnera l'expression de τ en fonction de h_0 et β , puis de h_0 , S , S' et g . On précisera son unité de système international.

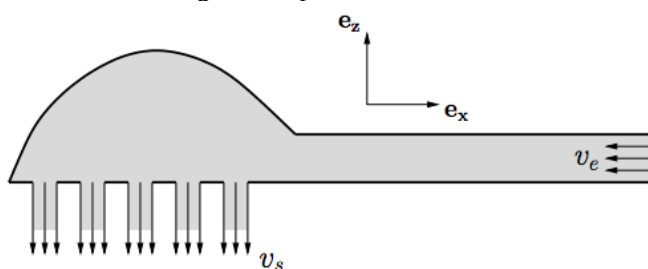
On rappelle que pour ε proche de 0 : $(1 + \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

- Calculer τ pour $S' = 100 S$ et $h_0 = 20$ m. On prendra : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Exercice 14

Un pommeau de douche est constitué d'un tuyau d'entrée de section $S = 1 \text{ cm}^2$ et de $N = 50$ trous de sortie ayant chacun une section $s = 1 \text{ mm}^2$. L'eau entre dans le pommeau à la vitesse v_e et en sort à la vitesse v_s (cf figure ci-après). On note J_V le débit volumique et $P_0 = 1,0$ bar la pression atmosphérique. On supposera que l'eau est un fluide parfait et incompressible (de masse volumique ρ), et l'écoulement permanent. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Le pommeau est horizontal comme sur la figure ci-après.



- Exprimer la vitesse de sortie v_s en fonction de la vitesse d'entrée v_e , de N , s et S , puis uniquement en fonction de v_e .
- Exprimer la pression d'entrée de l'eau P_e en fonction de P_0 , ρ , J_V et S .
- Déterminer la valeur de la surpression à l'entrée, $P_e - P_0$, pour que le débit de l'eau soit de 3L/min.

Exercice 15

On considère un tuyau d'arrosage de longueur $L = 10$ m, de section circulaire constante de diamètre $D = 1$ cm. Ce tuyau est maintenu horizontal et branché en A à une alimentation en eau fournissant une pression $P_A = 10^6$ Pa (figure 1). On note ρ la masse volumique de l'eau.

- Calculer le débit J_{V1} du tuyau en litres par seconde, sachant que la viscosité de l'eau est $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ à la température ambiante.

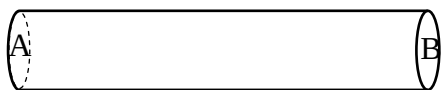


Figure 1

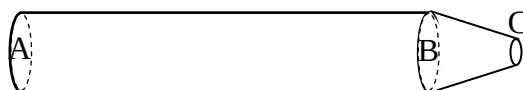


Figure 2

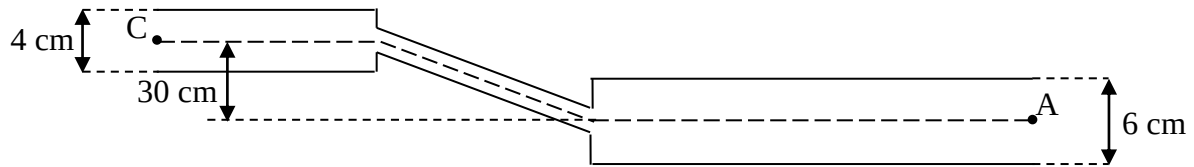
- Pour diminuer le débit, on place en B une pièce tronconique qui diminue la section de l'orifice (figure 2). La section en C a alors un diamètre $d = 4$ mm.
 - Exprimer la différence de pression $P_A - P_B$ en fonction des données et du nouveau débit J_{V2} , puis uniquement en fonction de J_{V2} .
 - Exprimer en fonction des données, la différence de pression $P_B - P_C$ en négligeant l'effet de la viscosité dans la pièce tronconique. Expliciter numériquement l'expression obtenue en gardant comme seule variable J_{V2} .
 - En déduire l'équation du deuxième ordre vérifiée par J_{V2} .
 - En faisant l'hypothèse que $P_A - P_B \ll P_B - P_C$, calculer J_{V2} en litres par seconde.
 - Vérifier la validité de l'hypothèse précédente.

Exercice 16

Un fluide de masse volumique constante ρ circule avec un débit volumique constant J_V dans une suite de canalisations cylindriques schématisées ci-dessous. Les pressions p_A en A et p_C en C ne sont pas égales à la pression atmosphérique (le fluide n'est pas en contact avec l'air en ces points). Les rayons des conduites sont notés respectivement R_A en A et R_C en C.

Le fluide s'écoule de A vers C avec une vitesse v_A en A et une vitesse v_C en C. Sa vitesse moyenne sur la section de la canalisation au niveau du point C est notée $\bar{v}$.

L'accélération de la pesanteur est notée g .



1. Le fluide est assimilé à un fluide réel newtonien incompressible. Sa variation de densité volumique d'énergie entre A et C est notée ΔE ($\Delta E > 0$). L'écoulement est permanent et laminaire. Etablir l'expression de ΔE en fonction de ρ , g , $\bar{v}$, p_A , p_C , R_A et R_C .
2. Si le fluide est de l'eau de viscosité négligeable, calculer la pression en C sachant que $J_V = 10 \text{ L/min}$; $\rho = 1 \text{ kg/L}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $p_A = 10^4 \text{ Pa}$.

Exercice 17

On considère un viscosimètre (figure 1) constitué d'un capillaire de rayon R_1 et de longueur L surmonté d'un récipient cylindrique de rayon R_2 . L'ensemble est rempli d'un liquide de masse volumique ρ et de viscosité η . Les plans (1) et (3) sont distants de h .

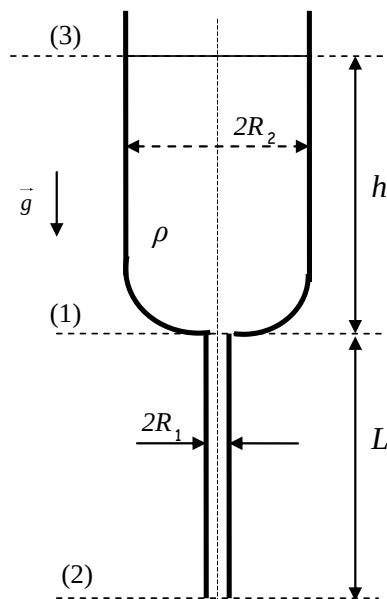


figure 1

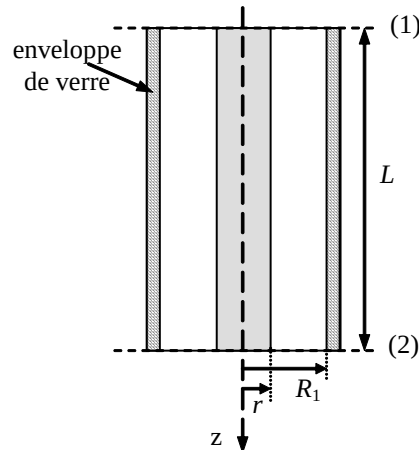


figure 2

Partie A : le capillaire

La figure 2 représente précisément le capillaire agrandi. Le liquide s'y écoule verticalement, c'est-à-dire depuis le plan (1) vers le plan (2). On suppose l'écoulement permanent. L'axe Oz est un axe vertical descendant.

On s'intéresse à une portion de liquide (représentée en grisé dans la figure 2) contenue dans un cylindre de rayon r ($r < R_1$), comprise entre les plans (1) et (2) distants de L . On rappelle que sur la surface latérale S de ce cylindre de rayon r s'exerce une force de viscosité ici parallèle à Oz et dont la norme est $\|\vec{F}\| = S\eta \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|$, où

v est le module de la vitesse du liquide. On notera P_1 et P_2 les pressions dans les plans (1) et (2).

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la portion cylindrique de rayon r , lors de cet écoulement permanent.

2. On admettra que la vitesse ne dépend que de r . Déduire de la question précédente une équation de la forme $\frac{dv}{dr} = k r$ où k s'exprime en fonction de L , P_1 , P_2 , ρ , η et du module g du champ de pesanteur. Donner le signe de k .
3. En déduire l'expression de $v(r)$ en fonction de k en précisant la constante d'intégration, d'après la condition d'adhérence. Donner l'expression de la vitesse maximale $v_{\max}$.
4. En déduire, en fonction de L , P_1 , P_2 , ρ , g , η , R_1 , r et dr , le débit volumique élémentaire dJ_v s'écoulant à travers une couronne de rayons compris entre r et $r+dr$.
5. Montrer que le débit volumique total J_v à travers le capillaire est :

$$J_v = \frac{\pi R_1^4}{8\eta} \frac{P_1 - P_2 + \rho g L}{L}$$

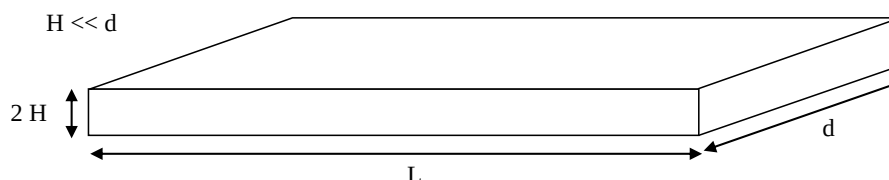
Partie B : le récipient cylindrique supérieur

1. On considère maintenant le viscosimètre rempli du liquide considéré depuis le début du problème, dans lequel les sections (2) et (3) sont à l'air libre à la pression P_0 . On supposera que les résultats obtenus en régime permanent dans le capillaire restent valables. Sachant que le rayon R_2 du récipient cylindrique est beaucoup plus grand que le rayon R_1 du capillaire, on peut négliger l'écoulement dans le cylindre supérieur. On appelle P_3 la pression dans le plan (3). Exprimer la différence de pression $P_1 - P_3$ en fonction des données indiquées sur la figure 1.
2. Réécrire, en fonction de h , l'expression de J_v donnée à la question 5 de la partie A.
3. La vitesse de variation de niveau $\frac{dh}{dt}$ étant la quantité représentant la baisse de niveau en fonction du temps, donner son signe et exprimer le débit J_v en fonction de cette quantité et de R_2 .
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la hauteur $h(t)$ de liquide à l'instant t .
5. Résoudre cette équation sachant que $h(t = 0) = h_0$. On fera apparaître un temps τ caractéristique de l'écoulement dont on donnera l'expression.
6. Soit ν la viscosité cinématique du liquide telle que $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Déterminer son équation aux dimensions et en déduire son unité dans le système d'unités international.
7. Calculer ν , sachant qu'il a fallu 6 minutes, à partir de l'instant initial $t = 0$, pour que le niveau baisse de 5 cm.

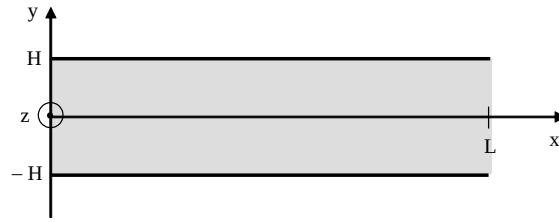
On donne : $g = 10 \text{ m/s}^2$; $R_1 = 1 \text{ mm}$; $L = 10 \text{ cm}$; $R_2 = 5 \text{ cm}$; $h_0 = 10 \text{ cm}$.

Exercice 18

La coutume de recueillir la sève de l'érable et de la faire bouillir pour en obtenir du sirop nous vient des Amérindiens. Pratiquant une entaille rudimentaire à l'aide d'un tomahawk, ils fixaient au bas de cette entaille un copeau de bois qui acheminait l'eau d'érable (= sève) vers un récipient d'écorce. Ils faisaient ensuite bouillir la sève ainsi recueillie dans des contenants d'argile pour obtenir du sirop d'érable dont ils appréciaient la valeur énergétique et nutritive. La sève recueillie est acheminée par gravité jusqu'à la cabane à sucre (où se fait la fabrication du sirop d'érable) à l'aide d'une conduite installée en pente. Cette conduite, représentée sur le schéma suivant, est parallélépipédique et rectangulaire, de longueur L , de largeur d et de hauteur $2H$, telle que H soit très petit devant d . La sève est assimilée à un fluide réel incompressible de viscosité η . On considère que l'écoulement de la sève est permanent et laminaire.



I- Dans un premier temps, on considère la conduite horizontale.

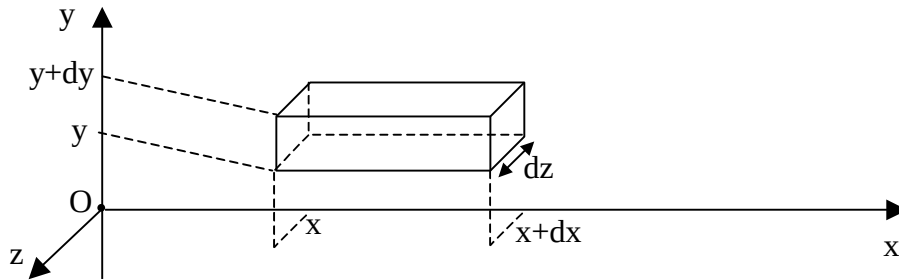


L'écoulement est induit par un gradient de pression dans la direction x , dont l'expression est :

$$\frac{dp}{dx} = \text{cte} = -\frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

L'écoulement se faisant dans la direction des x croissants, ce gradient de pression est négatif. $\Delta p = p_1 - p_2$ ($\Delta p > 0$) représente la différence de pression entre un point 1 en amont et un point 2 en aval de l'écoulement distants de $\Delta x = x_2 - x_1$ ($\Delta x > 0$).

On considère une particule de fluide de forme parallélépipédique et de dimensions dx , dy et dz , représentée sur la figure ci-dessous.



1. a) Donner l'expression de la somme des composantes suivant Ox des forces de pression s'exerçant sur cet élément de fluide.
- b) La composante résultante des forces de viscosité sur cet élément de fluide s'écrit :

$$f_\eta = f_{1x} + f_{2x} = \eta dx dz \left. \frac{dv_x(y)}{dy} \right|_{y+dy} - \eta dx dz \left. \frac{dv_x(y)}{dy} \right|_y \approx \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} dx dy dz.$$

- Donner la dimension et l'unité du coefficient de viscosité.
 - Représenter les forces de pression déterminées à la question précédente ainsi que $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ sur le schéma précédent en justifiant le sens de chacune des forces.
2. Déterminer l'équation vérifiée par $v_x(y)$ en écoulement permanent.
 3. Montrer que le profil de vitesses du fluide dans cette conduite est parabolique, donné par l'équation :

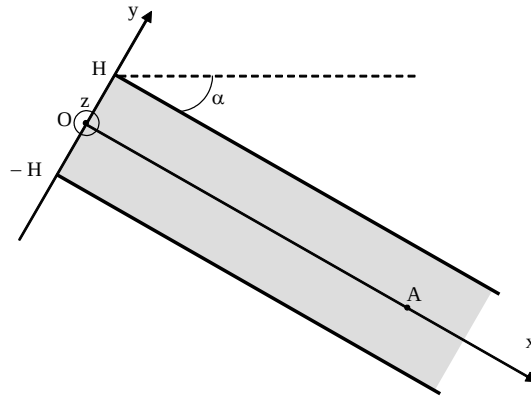
$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{1}{2\eta} (H^2 - y^2).$$

4. Exprimer le débit de liquide dJ_V à travers une section rectangulaire de largeur dz et de hauteur dy .
5. Justifier l'expression du débit de liquide par unité de largeur de conduite dans la direction Oz :

$$\frac{J_V}{d} = \int_{y_1}^{y_2} v_x(y) dy. \text{ Préciser les bornes d'intégration } y_1 \text{ et } y_2.$$

6. Déterminer l'expression de $\frac{J_V}{d}$ en fonction de Δp , Δx , η et H .
7. a) Déterminer l'expression de la vitesse maximale $v_{\max}$ du fluide en fonction des données.
- c) On définit la vitesse moyenne $\bar{v}$ de l'écoulement dans la conduite par $J_V = S \bar{v}$, où S est la section droite de conduite traversée par le fluide. Déterminer $\bar{v}$ en fonction de $v_{\max}$.

II- La conduite précédente est maintenant inclinée d'un angle $\alpha = 60^\circ$ par rapport à l'horizontale (schéma ci-dessous).



Le débit de liquide par unité de largeur de conduite dans la direction Oz a pour expression :

$$\frac{J_V}{d} = \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{2}{3\eta} H^3$$

où $p = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{r}$ est la pression motrice en un point M du fluide tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, ρ est la masse volumique de l'eau d'érable (= sève) et g l'accélération de la pesanteur.

Données : viscosité de la sève : $\eta = 1,5 \cdot 10^{-1}$ Poiseuille, $H = 5$ mm
 masse volumique de la sève : $\rho = 10^3$ kg.m⁻³, $g = 10$ m.s⁻²,
 point A (x_A, y_A, z_A) tel que $x_A = 100$ m.

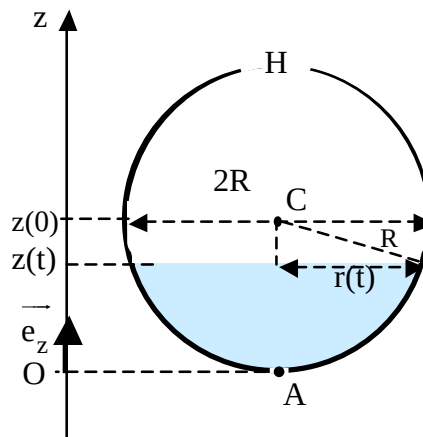
1. Exprimer p_O au point O (origine du système d'axes Oxyz), ainsi que p_A au point A ($x_A, y_A = 0, z_A$).
2. On considère que l'on est en régime de Poiseuille tel que $\frac{J_V}{d} = 6 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$. Calculer $\frac{\Delta p}{\Delta x}$.
3. La pression en O vaut $p_O = 10^5$ Pa. Etablir l'expression de p_A en fonction de $\frac{\Delta p}{\Delta x}$, p_O , ρ , g , et x_A .
4. Calculer p_A .

Exercice 19

Partie A

Un réservoir de forme sphérique, de centre C et de rayon $R = 40$ cm, est initialement rempli à moitié d'eau de masse volumique ρ . La pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau grâce à une ouverture pratiquée au sommet H du récipient sphérique. On ouvre à l'instant $t = 0$, un orifice A circulaire de faible section $s = 1$ cm² au fond du réservoir. On note $z(t)$, la hauteur d'eau dans le réservoir comptée à partir de A, à l'instant t . On nomme $r(t)$ le rayon de la surface libre de l'eau à l'instant t .

On suppose que la vitesse de la surface libre de l'eau est à chaque instant négligeable devant la vitesse v_A de sortie de l'eau au point A. On prendra $P_0 = 10^5$ Pa et $g = 10$ m/s² pour la pesanteur terrestre.



Dans cette partie, on considère l'eau comme un fluide parfait incompressible.

1. Préciser la valeur de z à $t = 0$, soit $z(0)$. Exprimer $r^2(t)$ en fonction de $z(t)$ et R .
2. Exprimer $v_A(t)$ en fonction de $z(t)$.
3. Exprimer la valeur absolue du débit volumique d'eau J_V en fonction de $r(t)$ et $\frac{dz}{dt}$, puis en fonction de $z(t)$ et $\frac{dz}{dt}$.

4. En déduire que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle (à variables séparables) :

$$(2R - z)\sqrt{z} dz = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi} dt.$$

5. Exprimer la durée T de vidange de ce réservoir en fonction de R , s et g .
6. Calculer T .

Partie B

Dans cette partie, on considère l'eau comme un fluide visqueux incompressible et on suppose que son écoulement est laminaire.

Le réservoir de forme sphérique précédent est maintenant totalement rempli d'eau de masse volumique ρ et de viscosité dynamique $\eta = 10^{-3}$ Pa.s. On visse verticalement sur le petit orifice circulaire A un tube cylindrique de diamètre $2a$ et de longueur $AB = L = 10$ cm. L'extrémité B est ouverte et en contact avec l'air ambiant.

La valeur absolue du débit volumique à travers une section s du tube s'exprime : $|J_V| = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta E}{L}$, où ΔE est la variation de densité volumique d'énergie du liquide lorsque ce dernier s'écoule d'une extrémité à l'autre du tube, telle que $\Delta E > 0$.

1. A partir d'un bilan énergétique et en justifiant les simplifications, exprimer ΔE en fonction des données et des pressions P_A et P_B , respectivement en A et B.
2. On donne $P_A = 1,08 \cdot 10^5$ Pa. Calculer $|J_V|$.
3. On rappelle l'expression du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ et de vitesse caractéristique V dans une conduite de dimension caractéristique ℓ : $R_e = \frac{V \ell \rho}{\eta}$.
- 3.1. Réécrire le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'eau dans le tube en fonction de s , J_V , ρ et η .
- 3.2. La transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent se produit lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur voisine de 2000. L'hypothèse initiale d'un écoulement laminaire dans le tube est-elle justifiée ?

Exercice 20

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ et de vitesse caractéristique V dans une conduite de dimension caractéristique ℓ :

$$R_e = \frac{V \ell \rho}{\eta}.$$

1. Que devient cette expression pour un écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R ? On note $\bar{v}$ la vitesse moyenne du fluide dans cette conduite.
2. Estimer la vitesse moyenne du sang dans l'aorte et dans le lit capillaire, sachant que le débit cardiaque moyen est de $83 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On suppose que le débit total est conservé entre le cœur, l'aorte, et la somme des capillaires. On donne le diamètre de l'aorte : $d_a = 2$ cm et on considère que le lit capillaire est constitué de $N_c = 10^{10}$ capillaires identiques de diamètre moyen : $d_c = 4 \mu\text{m}$.
3. La transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent se produit lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur voisine de 2000. L'écoulement peut-il être turbulent dans l'aorte ? dans le lit capillaire ? On prendra $\eta_s = 4 \cdot 10^{-3}$ Pa.s pour la viscosité du sang et $\rho_s = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour sa masse volumique.
4. Au cours d'un effort violent, le débit cardiaque peut quadrupler chez la plupart des personnes, voire septupler chez un sportif de haut niveau. L'écoulement peut-il alors devenir turbulent dans l'aorte ou dans le lit capillaire ?

Exercice 21

On considère un corps de seringue de section S et de volume V_s rempli de dopamine de masse volumique ρ . Ce corps de seringue est prolongé d'une aiguille de section s et de longueur ℓ . La dopamine doit être injectée dans une veine d'un patient. La pression dans cette veine est supérieure de 15 mm de Hg à la pression atmosphérique P_0 .

Données : $V_s = 5 \text{ cm}^3$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $S = 1 \text{ cm}^2$; $s = 0,2 \text{ mm}^2$ et $\ell = 3 \text{ cm}$.

1. Sachant que l'infirmière doit exercer une force supposée constante de 5 N sur le piston de la seringue, calculer le travail qu'elle fournit pour vider la seringue.
2. On considère que l'écoulement dans l'aiguille est laminaire et horizontal. Sachant que la vitesse moyenne d'éjection de la dopamine vaut $v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, déterminer le coefficient de viscosité η de la dopamine.
3. Calculer le temps nécessaire pour vider la seringue (durée d'injection).
4. Déterminer le nombre de Reynolds pour la seringue.

Exercice 22

La figure 2 ci-dessous schématise une trompe à eau (figure 1) utilisée dans les laboratoires de recherche comme une petite pompe à vide d'appoint (débit de quelques litres par minute et pression minimale de l'ordre de 30 hPa).

Cet appareil se compose d'un tube convergent (de base circulaire), raccordé à un robinet d'eau courante, puis d'un tube divergent (de base circulaire) au bout duquel sort le jet d'eau (turbulent) à la pression atmosphérique P_0 . Entre les deux est située une chambre étanche d'où sort le tuyau d'aspiration (connecté au point B). Cette chambre est remplie d'air dont la pression est uniforme et égale à celle de l'eau à la sortie du convergent. On a donc $P_A = P_B$, les points A et B étant représentés sur la figure 2.

Soit ρ la masse volumique de l'eau. Le diamètre interne du tube convergent est d_1 au niveau du robinet d'eau courante (au niveau du point R) et d_2 au niveau de la partie la plus étroite (au niveau du point A). Le point A est situé à une distance H de la section de sortie du robinet ($RA = H$). Le débit volumique d'eau est noté J_V .

On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ dans tout l'exercice.

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ et de vitesse caractéristique V dans une conduite de dimension caractéristique ℓ :

$R_e = \frac{V \ell \rho}{\eta}$. On rappelle également que la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement

turbulent se produit lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur voisine de 2000.



Figure 1

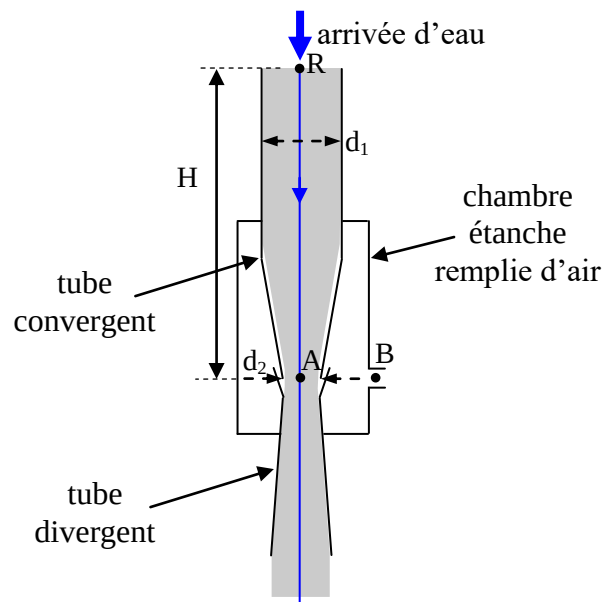


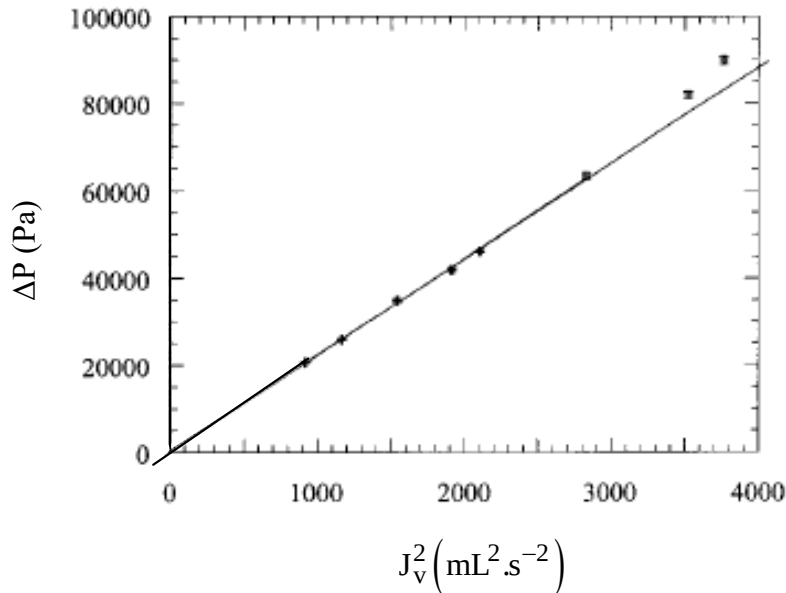
Figure 2

Partie I

On étudie l'écoulement permanent de l'eau dans le tube convergent de la trompe à eau.

1. On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible.
 - 1.1. Exprimer $\Delta P = P_R - P_A$ la différence de pression de l'eau entre la sortie du robinet et le point A, en fonction de ρ , g , J_V , H , d_1 et d_2 .

- 1.2. Sachant que les caractéristiques de la trompe à eau sont : $d_1 = 12 \text{ mm}$, $d_2 = 2,5 \text{ mm}$ et $H = 8 \text{ cm}$, réécrire ΔP uniquement en fonction de J_V .
2. Des mesures expérimentales de ΔP en fonction du débit d'eau courante sont réalisées avec cette trompe à eau afin de vérifier si l'écoulement de l'eau dans le tube convergent vérifie bien le modèle théorique utilisé dans la première question. Les points de mesure sont reportés sur le diagramme $\Delta P = f(J_V^2)$ ci-après. La droite d'ajustement des points au-dessous de $\Delta P = 8.10^4 \text{ Pa}$ est également représentée. Elle ne passe pas par l'origine du graphe mais par $\Delta P = -794 \text{ Pa}$ quand $J_V = 0 \text{ m}^3/\text{s}$. A partir de ces résultats et d'un raisonnement quantitatif, discuter la validité du modèle précédent.



3. On tient compte maintenant de la viscosité dynamique η de l'eau ($\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$).
- 3.1. Si J_V est le débit volumique de fluide dans une conduite de diamètre d , exprimer le nombre de Reynolds associé à cet écoulement en fonction de J_V , d , ρ et η .
- 3.2. L'expérience décrite à la question 2 a été réalisée pour 8 valeurs de débit volumique d'eau. A l'aide des points de mesure représentés sur le graphe précédent, déterminer la valeur minimale du nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'eau dans le tube convergent dans le cadre de cette expérience.
- 3.3. Que peut-on en conclure sur le régime d'écoulement (laminaire et/ou turbulent) dans le tube convergent pour les conditions expérimentales précédentes ?

Partie II

La trompe à eau décrite précédemment est utilisée pour aspirer un volume V' d'un mélange d'eau et de glycérol (sous-phase liquide d'une expérience sur les films de Langmuir) contenu dans une cuve peu profonde et ouverte (la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre du mélange, voir figure 3 ci-après). Pour cela, un tuyau cylindrique de longueur L et de section circulaire constante de diamètre intérieur d' est branché au point B, sur la trompe à eau. Ce tuyau est incliné d'un angle α par rapport à l'axe vertical de la trompe. On négligera l'embout conique fixé à l'extrémité libre du tuyau dans toute la partie II de l'exercice ($OB = L$).

On assimile le mélange {eau + glycérol} à un fluide réel incompressible de viscosité η' et de masse volumique ρ' . On considère que son écoulement dans le tuyau est permanent et laminaire.

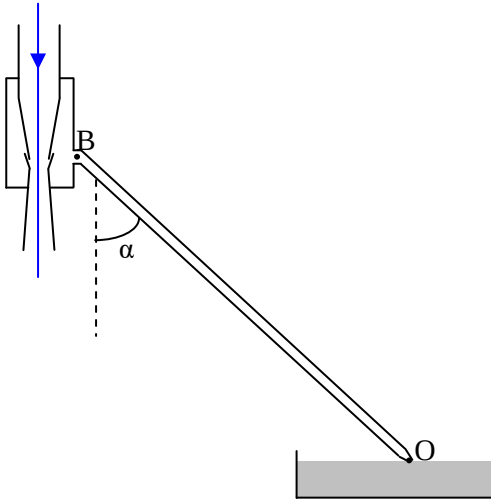


Figure 3

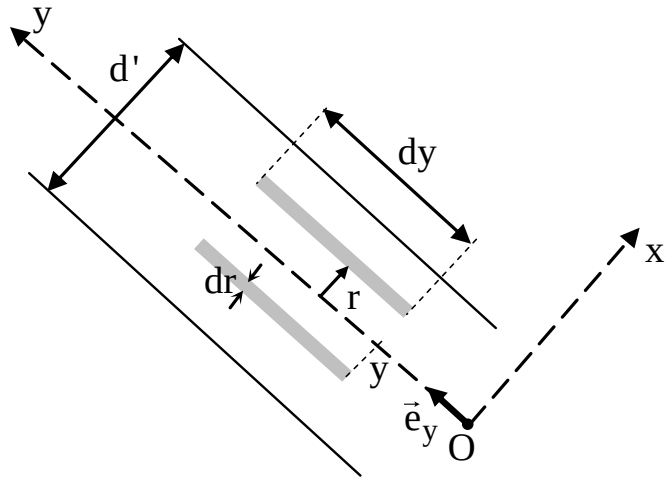


Figure 4

4. Considérons le volume de fluide compris entre deux cylindres de même axe Oy, de longueur dy et de base circulaire de rayons r et r + dr respectivement. Donner les expressions vectorielles des différentes forces de pression et de viscosité s'exerçant sur cet élément de fluide, dans la direction Oy de l'écoulement (on note $\vec{e}_y$ le vecteur unitaire associé à Oy). Représenter ces forces sur le schéma ci-après, qui montre une coupe longitudinale d'une portion du tuyau où se trouve l'élément de fluide. On rappelle la norme de la force de viscosité s'exerçant sur un élément de fluide cylindrique de surface latérale S : $\|\vec{F}\| = S\eta' \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|$, où η' est la viscosité du fluide et $\frac{\partial v}{\partial r}$ représente les variations de la norme de la vitesse du liquide dans la direction radiale du cylindre.
5. Le débit volumique à travers une section transverse du tuyau s'exprime : $J_v' = \frac{\pi d'^4}{128\eta' L} \frac{\Delta E}{L}$, où ΔE est la variation de densité volumique d'énergie du liquide lorsque ce dernier s'écoule d'une extrémité à l'autre du tuyau, telle que $\Delta E > 0$.
- 5.1. A partir d'un bilan énergétique et en justifiant les simplifications, exprimer ΔE en fonction de P_0 , P_B , ρ' , g, L et α .
- 5.2. Le robinet d'eau courante est réglé tel que $P_B = 600$ hPa. Calculer le débit J_v' . En déduire le temps nécessaire pour aspirer tout le mélange {eau + glycérol} de la cuve.
On donne : $P_0 = 10^5$ Pa ; $d' = 1$ cm ; $L = 1,5$ m ; $\eta' = 0,15$ Pa.s ; $\rho' = 1,21$ g.cm⁻³ ; $\alpha = 20^\circ$; $V' = 500$ mL.
- 5.3. Calculer le nombre de Reynolds associé à l'aspiration du mélange {eau + glycérol} dans le tuyau et conclure sur le régime de cet écoulement (laminaire ou turbulent).

Exercice 23

Dans tout ce problème, on note $\Delta P = P_A - P_B$ la perte de charge entre l'entrée et la sortie des vaisseaux étudiés, tous de longueur $AB = \ell$. Cette perte de charge est supposée constante.

Le sang est assimilé à un fluide réel incompressible de coefficient de viscosité η constant et de masse volumique ρ . On se place en régime permanent et on suppose que les écoulements étudiés sont laminaires.

On donne $\eta = 6.10^{-3}$ SI, $\rho \approx 1$ g.cm⁻³.

Questions préliminaires

1. Les vaisseaux étudiés dans ce problème ont tous des rayons inférieurs à 1,5 cm. Vérifier que l'écoulement du sang est bien laminaire dans l'ensemble de ces vaisseaux sachant que la vitesse moyenne d'écoulement du sang dans une conduite ne dépasse pas 0,2 m.s⁻¹.

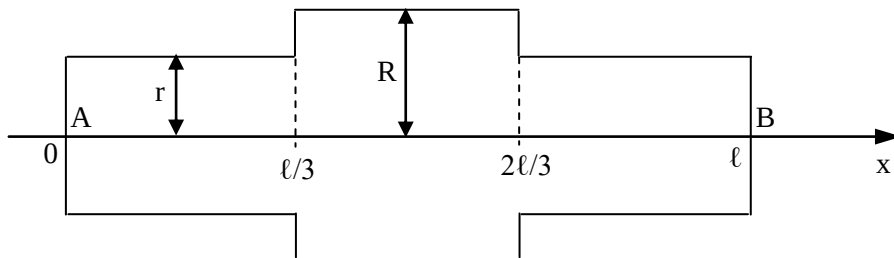
Un vaisseau sain est modélisé par un tronçon cylindrique horizontal de longueur $AB = \ell$ et de rayon constant r.

2. Calculer la résistance hydraulique R_h du vaisseau sain pour $\ell = 18$ cm et $r = 2$ mm.

Partie A : étude d'un anévrisme

Le tiers central d'un tronçon de vaisseau de longueur ℓ est le siège d'un anévrisme. Dans cette portion centrale, le rayon moyen R est plus grand que le rayon moyen r du reste du tronçon.

Le vaisseau est partagé en trois portions de même longueur $\ell/3$ et de résistances hydrauliques respectivement notées R_{h1} , R_{h2} et R_{h3} . La figure ci-dessous représente la coupe longitudinale du vaisseau atteint d'anévrisme. Les pertes de charges au niveau des raccords sont négligées.



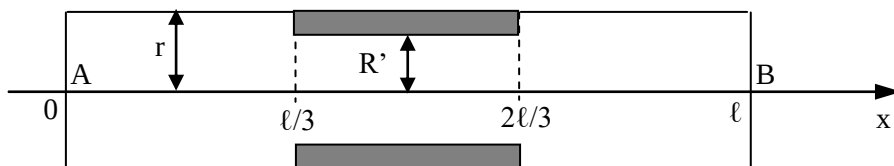
Coupe longitudinale d'un vaisseau présentant un anévrisme

3. Exprimer les résistances hydrauliques R_{h1} , R_{h2} et R_{h3} en fonction de la résistance hydraulique R_h du vaisseau sain.
4. Quel est le débit volumique sanguin J_{Va} dans le vaisseau atteint d'anévrisme, J_V étant le flux volumique sanguin dans le vaisseau sain.
5. On note P_{1a} et P_{2a} les pressions, respectivement en $x_1 = \ell/3$ et $x_2 = 2\ell/3$, dans le vaisseau atteint d'anévrisme. Exprimer $P_{1a} - P_{2a}$ en fonction de la perte de charge ΔP .
6. Dédurre de ce qui précède une des conséquences de l'anévrisme.

Partie B : étude d'une sténose

Le tiers central d'un tronçon d'artère de longueur ℓ est le siège d'une sténose. Dans cette portion centrale, le rayon moyen R' est plus petit que le rayon moyen r du reste du tronçon.

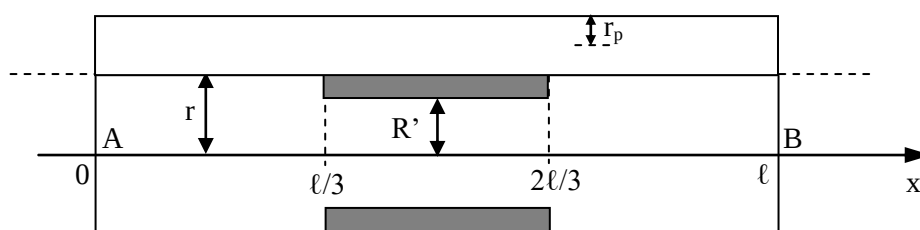
Le vaisseau est partagé en trois portions de même longueur $\ell/3$. On note R_{hs} la résistance hydraulique de l'artère sténosée et on pose $R_{hs} = \alpha R_h$ où α est une constante positive. La figure ci-dessous représente la coupe latérale de l'artère atteinte d'une sténose.



Coupe latérale d'une artère présentant une sténose

7. En comparant le débit volumique sanguin dans le vaisseau atteint de sténose, soit J_{Vs} , à celui dans le vaisseau sain (J_V), énoncer une conséquence possible d'une sténose.

Afin de réparer l'artère sténosée, on réalise un pontage par voie chirurgicale. Celui-ci consiste à contourner « l'obstacle » à l'aide d'un vaisseau prélevé dans l'organisme et mis en parallèle sur la totalité du tronçon de longueur ℓ . On note R_{hp} la résistance hydraulique du pontage de longueur ℓ . La figure ci-dessous représente la coupe diamétrale du pontage.



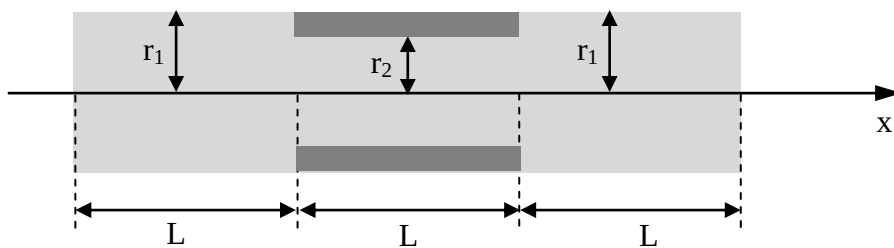
Coupe latérale de l'artère sténosée après pontage

8. Établir l'expression de la résistance hydraulique équivalente R_{he} de l'artère pontée.

9. Quelle doit être la valeur de R_{hp} afin de rétablir le débit volumique sanguin à sa valeur en l'absence de sténose ?
10. Déterminer l'expression du rayon du vaisseau de pontage permettant de rétablir le débit volumique sanguin à sa valeur en l'absence de sténose.
11. Calculer r_p sachant que $r = 2$ mm et $R' = 1$ mm.

Exercice 24

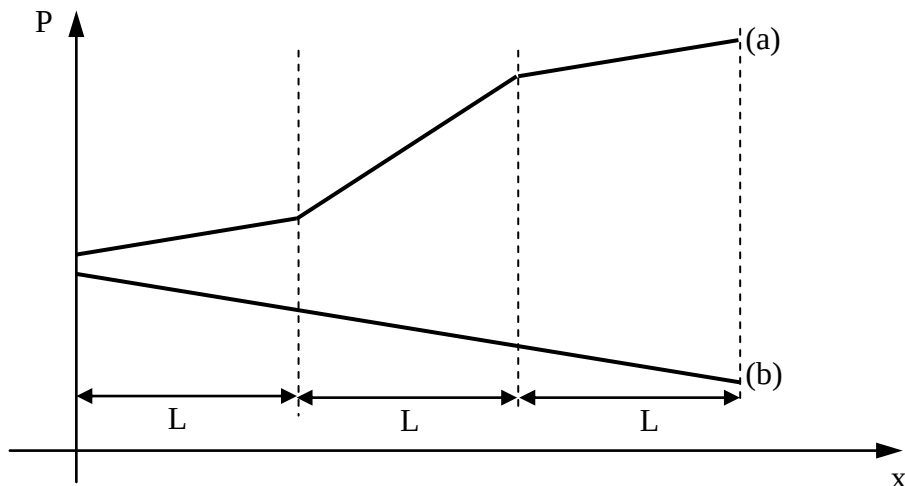
On rappelle l'expression du débit volumique J_v pour un écoulement de type Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale de rayon constant R et de longueur L : $J_v = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L}$, où $\Delta P > 0$ est la variation de pression au sein du liquide de viscosité η lorsque ce dernier s'écoule d'une extrémité à l'autre de la conduite. Une artère supposée cylindrique et horizontale, de rayon r_1 , présente une sténose, qui consiste en un rétrécissement localisé de l'artère, de rayon r_2 tel que $r_1 = \sqrt{2} r_2$. Cette artère est divisée en 3 portions de même longueur L (figure ci-dessous).



Le sang est assimilé à un fluide réel incompressible de coefficient de viscosité η constant. On se place en régime permanent et on suppose que les écoulements étudiés sont laminaires et obéissent à la loi de Poiseuille. Le sang s'écoule dans le sens de l'axe des x .

On note respectivement ΔP_1 , ΔP_2 et ΔP_3 les pertes de charge dans chaque portion de l'artère.

1. Comparer quantitativement ΔP_1 , ΔP_2 et ΔP_3 . Justifiez vos réponses.
2. L'une des courbes suivantes (a ou b) peut-elle représenter la variation de la pression sanguine dans l'artère ? Justifier la réponse.



Exercice 25

La formation d'un anévrisme se produit le plus souvent à partir d'une dilatation artérielle localisée. Une poche de sang fusiforme peut alors se créer par dédoublement de la tunique artérielle. Dans la moitié des cas, un caillot de sang se forme à l'intérieur.

Les complications majeures sont d'une part le risque d'obstruction d'une artère provoquée par la migration du caillot et d'autre part le risque hémorragique par rupture de l'anévrisme.

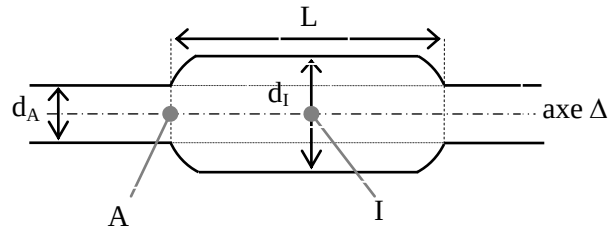
Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide de modèles simplifiés, qu'une dilatation permanente de l'artère peut-être à la fois responsable d'un accroissement de la pression sanguine et d'une diminution de la vitesse moyenne du sang.

Un anévrisme fusiforme est assimilé à une conduite cylindrique de longueur L et de diamètre d_I disposé sur le trajet d'une artère de diamètre constant d_A ($d_A < d_I$) et d'axe horizontal Δ .

Anévrisme fusiforme



Conduite cylindrique de diamètre d_I



Les points A et I de l'axe Δ sont choisis respectivement à l'entrée et au centre de l'anévrisme.

Le débit volumique J_0 dans l'artère est supposé constant et la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la partie dilatée est notée Δp .

Dans la première partie de l'exercice (partie A) le sang est considéré comme un fluide parfait incompressible et ensuite (parties B et C) il sera considéré comme un liquide newtonien de coefficient de viscosité η ($\eta = 5,0 \cdot 10^{-3}$ SI) et de masse volumique ρ ($\rho \approx 1,0 \text{ g.cm}^{-3}$). On considérera de plus que l'écoulement est laminaire à la fois dans la partie saine de l'artère et dans l'anévrisme.

On rappelle les expressions du débit volumique J_v et de la vitesse $v(r)$ à une distance r de l'axe de la conduite pour un écoulement de type Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre

constant D et de longueur L : $J_v = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \eta L}$; $v(r) = \frac{\Delta p}{4 \eta L} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$ où η est le coefficient de viscosité du

fluide et Δp la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite.

Partie A : Ecoulement dans le cas d'un fluide parfait

Dans cette première partie, on admet que la longueur L de la déformation initiale est voisine du diamètre d_I .

Le sang peut alors être considéré comme un fluide parfait incompressible.

On désigne respectivement par (v_A, P_A) et (v_I, P_I) les couples (vitesse, pression) du fluide respectivement aux points A et I.

1. Exprimer la vitesse v_I en fonction de v_A , d_A et d_I .
2. Etablir une expression de la pression P_I en fonction de P_A , J_0 , ρ , d_A et d_I .
3. Calculer l'augmentation de pression $P_I - P_A$ en mmHg pour un débit volumique $J_0 = 0,6 \text{ L.min}^{-1}$ et des diamètres $d_I = 2\sqrt{2} \text{ mm}$ et $d_A = 2 \text{ mm}$. On prendra $760 \text{ mmHg} \approx 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Partie B : Ecoulement dans le cas d'un fluide newtonien

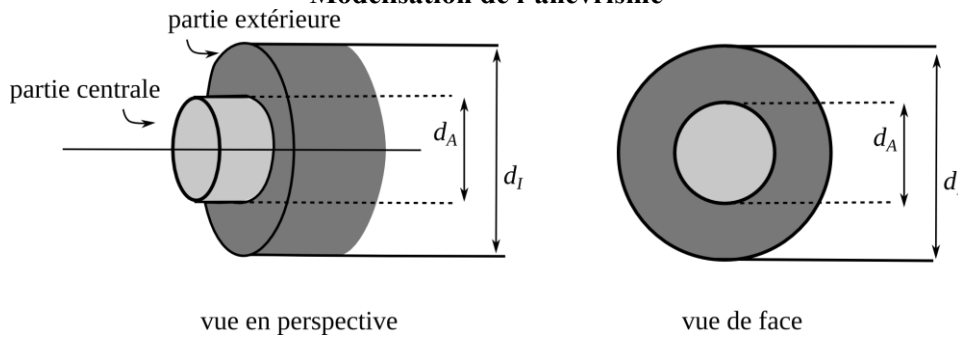
Lorsque la longueur de la zone pathologique est supérieure au diamètre d_I , le sang est assimilé à un liquide newtonien de coefficient de viscosité η et de masse volumique ρ .

L'anévrisme est modélisé par une conduite cylindrique de diamètre d_I et de longueur L .

L'écoulement est supposé laminaire.

On sépare par la pensée la conduite cylindrique de diamètre d_I au niveau de l'anévrisme en deux volumes : un cylindre central de diamètre d_A et un cylindre creux limité par les diamètres d_A et d_I dans lequel s'emboîte le premier (voir schéma ci-après). On appellera le premier volume la partie centrale et le second la partie extérieure. On note J_{d_A} le débit volumique sanguin dans la partie centrale et J_{d_A/d_I} celui dans la partie extérieure.

Modélisation de l'anévrisme



4. Ecrire le débit volumique dJ_v à travers une fine couronne centrée sur l'axe Δ , de rayon r et de largeur $dr \ll r$.
5. Exprimer le débit J_{d_A} de sang artériel qui s'écoule dans la partie centrale de l'anévrisme.
6. Exprimer le débit J_{d_A/d_I} de sang artériel qui s'écoule dans la partie extérieure de l'anévrisme en fonction de J_0 .
7. Quelle condition doit satisfaire le diamètre d_I de la partie dilatée pour que le débit dans la partie extérieure soit inférieur à celui dans la partie centrale, autrement dit pour que le débit dans la partie extérieure soit inférieur à $J_0 / 2$?

Partie C : Renouvellement du sang dans la partie dilatée de l'artère

On se place toujours dans le cadre du modèle proposé dans la partie B, c'est-à-dire que la conduite cylindrique de diamètre d_I est séparée par la pensée, au niveau de l'anévrisme, en deux volumes : la partie centrale et la partie extérieure (voir schéma de la partie B).

Le débit J_0 dans la partie saine de l'artère se divise en deux : J_{d_A} dans la partie centrale et J_{d_A/d_I} dans la

partie extérieure. On peut montrer que $J_{d_A/d_I} = \frac{\pi \Delta P}{128 \eta L} (d_I^2 - d_A^2)^2$.

Le temps de renouvellement du sang dans une portion saine de l'artère de longueur L est noté t_0 .

8. On désigne par t_{d_A/d_I} le temps nécessaire au renouvellement du volume de sang contenu dans la partie extérieure de l'anévrisme. Exprimer $\frac{t_{d_A/d_I}}{t_0}$.

9. Calculer $\frac{t_{d_A/d_I}}{t_0}$ si $d_I \approx 1,5 d_A$.

Exercice 26

On considère un vaisseau capillaire sanguin, cylindrique et horizontal, de longueur ℓ et de rayon a . On suppose que les parois sont rigides, que le régime d'écoulement est laminaire et permanent et que le sang est un fluide Newtonien de viscosité η . La vitesse v d'écoulement en un point M situé à la distance r de l'axe du

capillaire, est donnée par : $v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ où v_0 est une constante.

1. Vérifier que la condition d'adhérence est réalisée.
2. Quelle est l'expression de la vitesse moyenne $\bar{v}$ du sang dans ce capillaire ?
3. Déterminer, en fonction de a et v_0 , le débit J_v du sang dans le capillaire.
4. Quelle est, en fonction de η , a et v_0 , la perte de charge ω par unité de longueur ?
5. Exprimer la variation de pression ΔP entre les extrémités du capillaire.
6. Calculer ΔP . On donne : $\eta = 3.10^{-3}$ Poiseuille, $a = 10 \mu m$, $\ell = 1$ cm et $v_0 = 0,5$ mm·s⁻¹.
7. On s'intéresse dans la suite de l'exercice, au réseau vasculaire d'un organe. Ce réseau est assimilable à un ensemble de N capillaires en parallèle, tous identiques au capillaire précédent. Ce réseau permet de conduire le sang d'une artère A à une veine V . Sachant que la section de l'artère est $S_A = 20$ mm² et que la vitesse moyenne d'écoulement du sang dans l'artère est $v_A = 20$ cm·s⁻¹, évaluer le nombre N de capillaires.

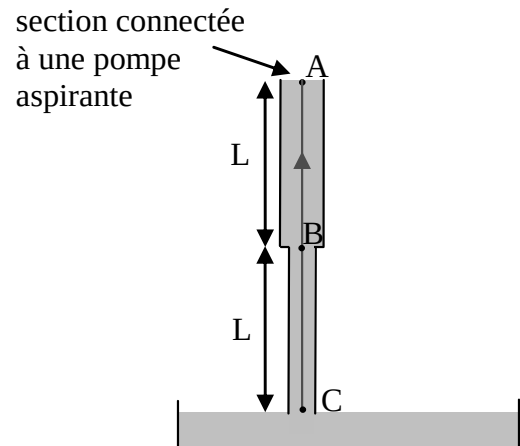
8. Calculer le volume de sang présent à chaque instant dans le réseau capillaire de l'organe.
9. En combien de temps Δt se renouvelle-t-il ?
10. Calculer la résistance hydraulique R_{hc} d'un capillaire.
11. Calculer la résistance hydraulique R_{hrc} du réseau capillaire de l'organe.

Exercice 27

Un expérimentateur souhaite aspirer un volume V d'une solution aqueuse de glycérine contenue dans une cuve peu profonde (quelques millimètres) et ouverte (la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de la solution). Pour cela, un tuyau cylindrique de longueur L et de rayon intérieur constant R est connecté en A à une pompe aspirante. Son extrémité B est raccordée à une pipette en verre cylindrique de même longueur L que le tuyau et de

rayon interne constant R' tel que $R' = \frac{3}{4}R$.

L'ensemble {tuyau + pipette} est supposé vertical.



La solution aqueuse est assimilée à un fluide réel incompressible de masse volumique ρ et de coefficient de viscosité dynamique η .

L'écoulement de ce fluide dans la pipette et le tuyau est laminaire et permanent.

Données : $P_0 = 10^5$ Pa ; $P_A = 0,8 \cdot 10^5$ Pa ; $L = 50$ cm ; $\rho = 1,2$ g.cm⁻³ ; $\eta = 0,14$ Pa.s ; $g = 10$ m.s⁻² et $V = 120$ mL.

On rappelle l'expression du débit volumique J_v pour un écoulement de type Poiseuille dans une conduite

cylindrique de rayon constant R et de longueur L : $J_v = \frac{\pi R^4 \Delta E}{8 \eta L} = \frac{\Delta E}{R_h}$, où $\Delta E > 0$ est la variation de densité

volumique d'énergie du liquide lorsque ce dernier s'écoule d'une extrémité à l'autre de la conduite et R_h est la résistance hydraulique de cette dernière.

1. a) Exprimer la résistance hydraulique équivalente $R_{h,eq}$ à la résistance de l'ensemble {tuyau + pipette} en fonction du rayon R , de η et de L .
b) Si la conduite équivalente à l'ensemble {tuyau + pipette} est cylindrique et de longueur $L_{eq} = 2L$, quelle doit être son rayon interne R_{eq} ? On exprimera R_{eq} en fonction de R .

Dans la suite de l'exercice, le dispositif précédent est assimilé à une conduite cylindrique unique, verticale, de longueur $2L$ et de rayon R_{eq} .

2. Exprimer la perte de charge ΔE dans la pipette et le tuyau en fonction des données littérales.
3. Calculer ΔE .
4. On note S_e la section de la conduite équivalente au système {tuyau+pipette}. Exprimer le temps τ nécessaire pour aspirer toute la solution liquide de la cuve en fonction de V , η , L , S_e , et ΔE .
5. Calculer le temps τ sachant que $S_e = 28$ mm².

Exercice 28

Un canal microfluidique horizontal de section rectangulaire à grand rapport de forme (hauteur h et largeur w telles que $h \ll w$) et de longueur L ($L \gg w$) est rempli d'eau, assimilée à un fluide newtonien incompressible de viscosité η et de masse volumique ρ . Un gradient de pression dans la direction Ox est généré à l'aide d'un dispositif de vases communicants imposant la différence de pression ΔP positive entre les extrémités B et C du canal. Les deux réservoirs du dispositif, ouverts et en contact avec l'air à la pression atmosphérique P_0 , ont une section S beaucoup plus grande que la section S' du canal (figure 1). La différence de hauteur d'eau entre les deux réservoirs est notée ΔH ($\Delta H > 0$).

On s'intéresse au régime permanent de l'écoulement. On néglige les effets de la viscosité dans les réservoirs. On appelle J_v le débit volumique d'eau dans le canal tel que $J_v > 0$.

On note g l'accélération de la pesanteur.

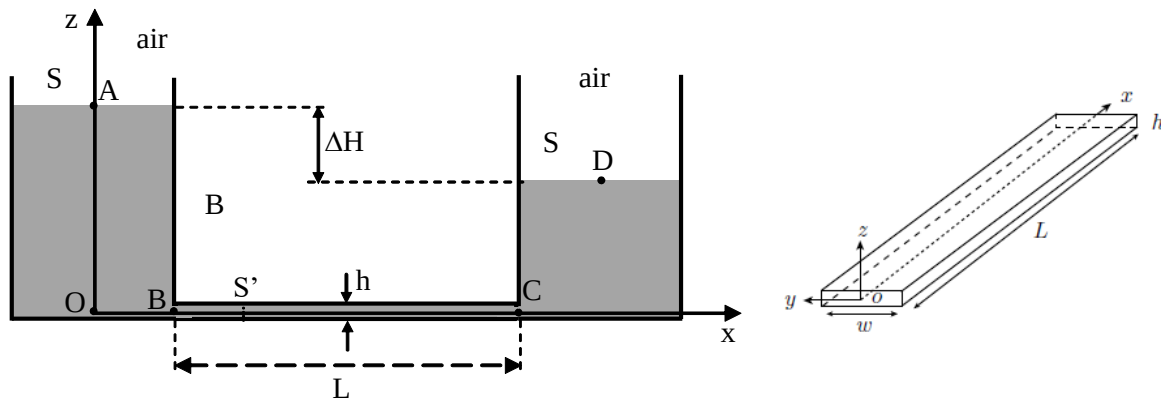


Figure 1 : (gauche) vue en coupe du canal microfluidique avec le système de vases communicants ; (droite) vue en perspective du canal.

On rappelle :

- l'expression du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ et de vitesse caractéristique V dans une conduite de dimension caractéristique ℓ :

$$Re = \frac{V \ell \rho}{\eta} . \text{ On rappelle également que la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent se produit lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur voisine de 2000.}$$

Données :

Dimensions du canal microfluidique : $h = 10 \mu\text{m}$, $w = 100 \mu\text{m}$ et $L = 1 \text{ mm}$;

Vitesse moyenne d'écoulement de l'eau dans le canal : $V_0 = 100 \mu\text{m.s}^{-1}$;

Coefficient de viscosité de l'eau : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$;

Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

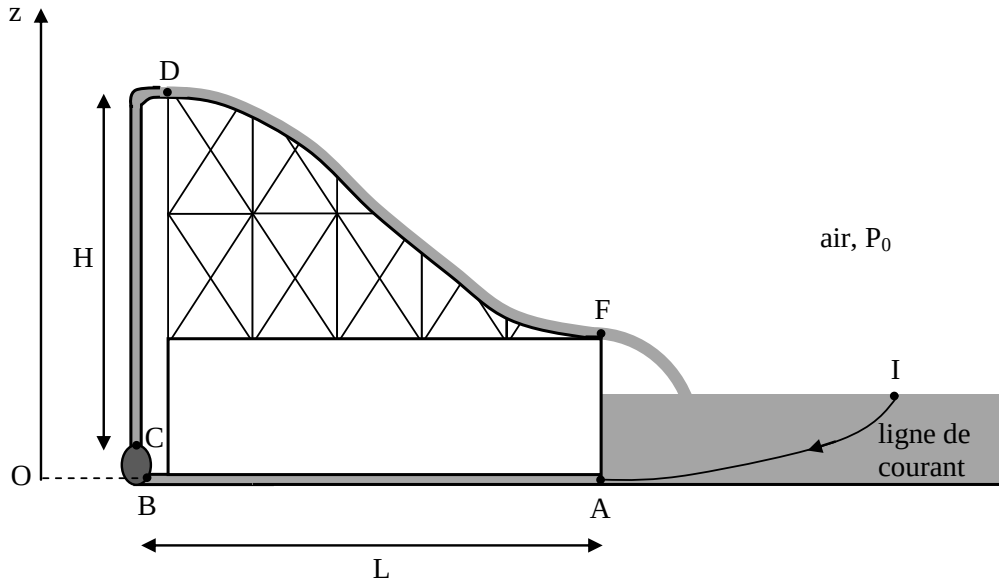
1. Montrer que la vitesse de la surface libre de chaque réservoir est négligeable devant la vitesse du fluide à l'entrée et à la sortie du canal.
2. Par application du théorème de Bernoulli dans chaque réservoir, déterminer la différence de pression ΔP entre les deux extrémités du canal en fonction de ρ , g et ΔH .
3. Préciser, en justifiant votre réponse, la dimension caractéristique qui intervient dans ce problème pour déterminer le nombre de Reynolds dans le canal. Exprimer Re en fonction des notations utilisées dans l'exercice puis estimer ce nombre. Qu'en concluez-vous sur la nature de l'écoulement ?
4. La perte de charge par unité de longueur, $\frac{\Delta E}{L}$, d'un fluide de viscosité η , qui s'écoule dans une conduite de section rectangulaire (hauteur h et largeur w telles que $h \ll w$) et de longueur L ($L \gg w$), avec un débit volumique J_v , est donnée par la relation de Hagen-Poiseuille : $\frac{\Delta E}{L} = \frac{12 \eta J_v}{h^3 w}$. Déterminer l'expression de J_v en fonction de ρ , g , ΔH , h , w , L et η .
5. Calculer la différence de niveau d'eau ΔH à ajuster dans le dispositif de vases communicants pour obtenir un écoulement d'eau avec un débit J_v égal à $3,6 \mu\text{L.h}^{-1}$.
6. Quelle devrait être la différence de niveau d'eau dans le dispositif de vases communicants pour obtenir le débit précédent, si $h = 100 \mu\text{m}$ (en supposant que la relation de Hagen-Poiseuille reste valable) ? Commenter.

Exercice 29

La figure ci-après représente une installation utilisée dans un parc d'attraction aquatique. Celle-ci est constituée :

- d'un toboggan formant un canal descendant permettant d'acheminer par gravité l'eau vers une piscine ;
- d'une conduite cylindrique d'aspiration AB horizontale de longueur $L = AB = 10 \text{ m}$ et de diamètre $d = 15 \text{ cm}$;
- d'une pompe électrique qui aspire l'eau à un débit volumique $J_v = 10,6 \text{ L.s}^{-1}$ depuis la piscine et la refoule en D, vers le toboggan ;

- d'une conduite cylindrique de refoulement CD verticale de hauteur $H = CD = 8 \text{ m}$ et de diamètre $d' = 10 \text{ cm}$.



L'eau, de masse volumique ρ , est en écoulement permanent et reste en circuit fermé : piscine, tube AB, pompe, tube CD, toboggan, piscine, etc. On suppose que le niveau de l'eau dans la piscine reste constant (sa vitesse au point I situé à la surface libre de l'eau dans la piscine est nulle). Les épaisseurs des canalisations et de la coulée d'eau sur le toboggan sont négligeables devant les hauteurs du système. L'eau est constamment en contact avec l'atmosphère le long du toboggan.

La pompe située entre B et C permet de compenser les pertes de charge par frottements dans les tuyaux AB et CD. Dans ces parties du circuit, l'eau est assimilée à un fluide réel de viscosité dynamique η . On ne tient compte que des pertes de charges régulières (toutes les pertes de charges singulières sont négligeables). Les frottements sont négligeables dans le reste du circuit, l'eau peut donc y être considérée comme un fluide parfait.

On définit un axe Oz ascendant, l'origine O se situant au même niveau que la conduite horizontale AB ($z_A = z_B = 0$).

On donne :

- la masse volumique de l'eau : $\rho = 1 \text{ kg.L}^{-1}$,
- la viscosité dynamique de l'eau : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$,
- l'accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
- la pression au point D : $P_D = P_0 = 1 \text{ bar}$ (pression atmosphérique) ;
- les altitudes respectivement des points I, C, D et F (point de sortie de l'eau du toboggan) : $z_I = 1,5 \text{ m}$; $z_C = 0,3 \text{ m}$, $z_D = 8,3 \text{ m}$ et $z_F = 2,5 \text{ m}$.

On rappelle :

- l'expression du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ et de vitesse caractéristique V dans une conduite de dimension caractéristique ℓ :

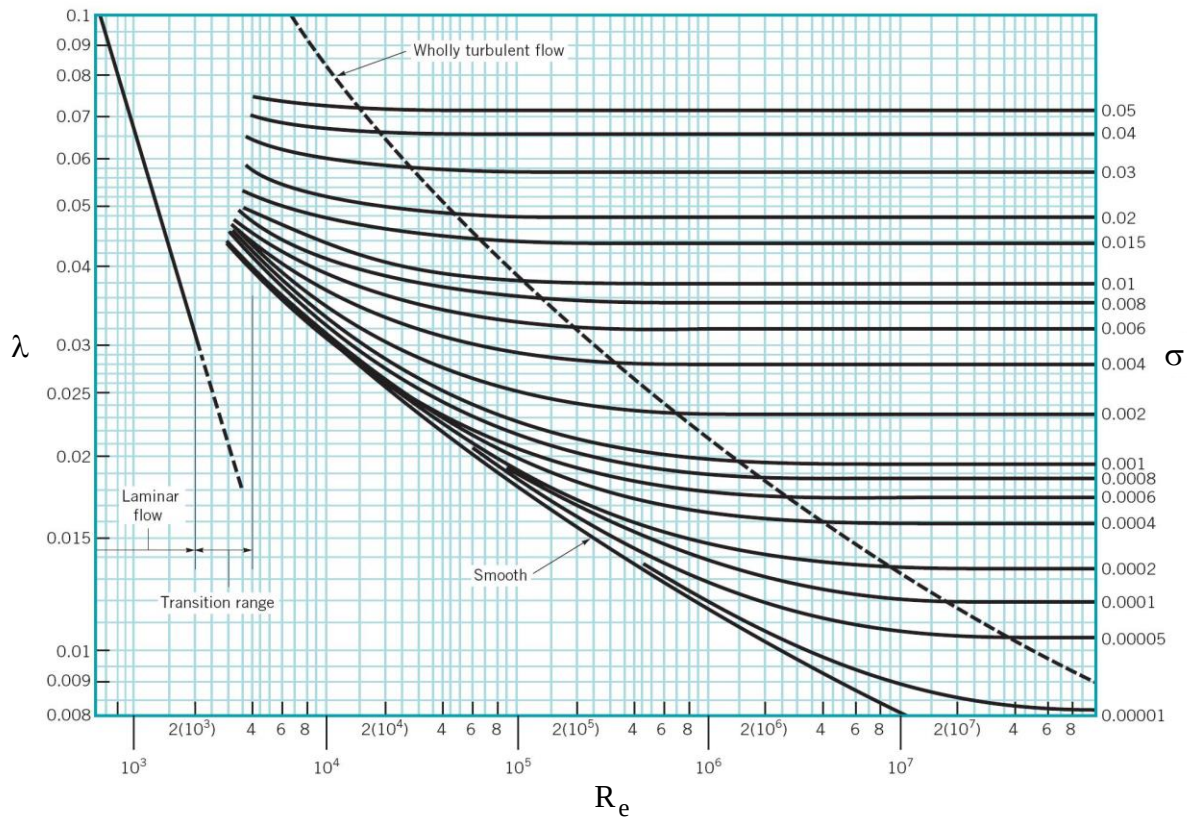
$R_e = \frac{V \ell \rho}{\eta}$. On rappelle également que la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent se produit lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur voisine de 2000.

- La loi de Darcy-Weisbach exprimant la perte de charge linéaire (régulière) dans une conduite cylindrique horizontale de longueur L et de diamètre D , d'un fluide réel incompressible de masse volumique ρ ,

s'écoulant à une vitesse caractéristique V : $\Delta p = \lambda \frac{\rho V^2 L}{2D}$ (λ est le coefficient de perte de charge linéaire dans la conduite).

1. Exprimer la vitesse de l'eau en bas du toboggan, V_F (au point F), en fonction de J_V , d' , g , z_D et z_F .
2. Calculer V_F .
3. Exprimer la vitesse moyenne V d'écoulement de l'eau dans la conduite AB en fonction des données littérales.
4. Exprimer puis calculer la pression au point A, P_A .

5. Déterminer le nombre de Reynolds dans la conduite AB sachant que l'eau s'y écoule avec une vitesse moyenne de 60 cm.s^{-1} . En déduire la nature de l'écoulement.
6. La rugosité relative de la paroi interne de la conduite AB est $\sigma = 5.10^{-5}$. A partir du diagramme de Moody ci-après, déterminer le coefficient de perte de charge linéaire λ dans la conduite AB en indiquant la démarche utilisée sur le schéma et en l'expliquant brièvement.



7. En déduire la perte de charge linéaire entre A et B.
8. Vérifier que celle-ci est égale à $0,23 \text{ J/kg}$.