

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde incluse).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Soit le système (S) tel que :
$$\begin{cases} x + y = a \\ -x - y + z = b \\ -y + z = c \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, exprimer x , y et z en fonction de a , b et c .

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ z = a + b \\ -y + z = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -y + z = c \\ z = a + b \end{cases} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -y + a + b = c \\ z = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ y = a + b - c \\ z = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - a - b + c \\ y = a + b - c \\ z = a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -b + c \\ y = a + b - c \\ z = a + b \end{cases}} \end{aligned}$$

2. Donner l'écriture matricielle du système (S) en notant A la matrice associée au système. Calculer le déterminant de A .

(S) s'écrit matriciellement : $AX = B$, soit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On a donc : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

3. A partir du résultat de la question 1, déduire l'expression de la matrice inverse de A en justifiant la démarche utilisée.

* $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la matrice A est inversible.

* $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

$$\text{Or } X = \begin{pmatrix} -b+c \\ a+b-c \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}B, \text{ donc : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

Soit la matrice B telle que : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

4. Vérifier que cette matrice est inversible et déterminer son inverse B^{-1} à l'aide de la formule de Cramer pour l'inversion des matrices.

$$* \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det B = 2 - (-1) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ la matrice B est inversible.

* Inversion de la matrice B par la méthode de Cramer : $B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{Com } B)^T.$

Calculons la comatrice de B :

$$\text{Com } B = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut vérifier $B^{-1}B = I$.

Partie C

5. Soit la matrice $C = AB$. Justifier (sans calculer C) que si A et B sont inversibles, alors la matrice C est inversible. *On pensera à utiliser une propriété du déterminant.*

$$\det(C) = \det(AB) = \det(A) \times \det(B) = 1 \times 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice } C \text{ est } \mathbf{inversible}.$$

6. Montrer que la matrice inverse de $C = AB$ est donnée par la formule : $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$\text{Calculons } C^{-1}C = (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I B = B^{-1}B = I \text{ donc : } \mathbf{C^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

7. A l'aide des réponses aux questions 3 et 4 et de la formule précédente, déterminer C^{-1} .

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Remarque : } C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$$C^{-1}C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Exercice 2 Le modèle de développement des plantes de Lindenmayer

Aristid Lindenmayer a proposé en 1968 une formalisation de règles de production d'éléments biologiques qui a, entre autres, permis de modéliser l'évolution morphologique de systèmes ramifiés (plantes). On considère une population cellulaire dont on veut étudier la croissance.

Par expérimentation, on a pu mettre en évidence que cette population cellulaire pouvait être divisée en 2 catégories qui ont des comportements différents :

- Les cellules jeunes, ou immatures, notées a , qui ne sont pas susceptibles de se diviser. Par contre, elles deviennent matures à la génération suivante.
- Les cellules matures, notées b , qui se divisent en deux et donnent à la génération suivante, une cellule de type a et une cellule de type b .

Pour la suite de l'exercice, on suppose que l'état initial ($t = 0$) ne contient qu'une seule cellule de type a . De plus, on considère les évolutions du système de générations en générations, autrement dit le temps t compte le nombre de générations depuis l'état initial.

En notant $N_a(t)$ et $N_b(t)$ respectivement les nombres de cellules a et b au temps t , on a la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} N_a(t+1) = N_b(t) \\ N_b(t+1) = N_a(t) + N_b(t) \end{cases}.$$

1. Écrire le système précédent sous la forme matricielle $N(t+1) = A N(t)$, en notant :

$N(t) = \begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix}$, le vecteur colonne des deux populations au temps t . Donner l'expression de la matrice A .

$$N(t+1) = AN(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N_a(t+1) \\ N_b(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix} \text{ d'où : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les valeurs propres, notées λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_2 > \lambda_1$) de la matrice A .

$$* P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

* Les valeurs propres de la matrice A sont les **racines de son polynôme caractéristique**, donc les solutions de : $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Le discriminant est : $\Delta = 1 + 4 = 5$. Les racines sont donc : $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Définir puis déterminer les vecteurs propres associés à la matrice A . On exprimera leurs composantes en fonction de λ_1 et λ_2 .

On cherche les vecteurs propres $Y \neq \mathbf{0}_{2 \times 1}$ tels que $AY = \lambda Y \Leftrightarrow (A - \lambda I) Y = \mathbf{0}_{3 \times 1}$.

* Pour la valeur propre λ_1 : $(A - \lambda_1 I) Y_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 x + y = 0 \\ x + (1 - \lambda_1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x + (1 - \lambda_1)\lambda_1 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x + \lambda_1 x - \lambda_1^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x \underbrace{(1 + \lambda_1 - \lambda_1^2)}_0 = 0 \end{cases}$$

d'où : $y = \lambda_1 x \neq 0$, puis $\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

* Pour la valeur propre λ_2 :

On a de même $\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_2 x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

4. Soit la matrice P telle que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Exprimer le déterminant de P en fonction de λ_1 et λ_2 puis calculer sa valeur. Justifier que la matrice P est inversible, puis déterminer sa matrice inverse, notée P^{-1} en fonction de λ_1 et λ_2 .

* $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \neq 0 \Rightarrow P$ est **inversible**.

* D'après la formule du cours pour l'inversion des matrices 2×2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que $PDP^{-1} = A$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 PDP^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{d'où : } PDP^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_2^2 \lambda_1 & -\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow PDP^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) & (-\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.
 \end{aligned}$$

6. Donner le vecteur initial $N(0)$ puis exprimer $N(n)$ en fonction de $N(0)$, A et n . En déduire l'expression de $N(n)$ en fonction de $N(0)$, P , D , P^{-1} et n . On simplifiera au maximum l'expression.

$$* N(0) = \begin{pmatrix} N_a(0) \\ N_b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* N(n) = AN(n-1) = A^2N(n-2) = A^3N(n-3) = \dots = A^nN(0)$$

$$\Rightarrow N(n) = \begin{pmatrix} N_a(n) \\ N_b(n) \end{pmatrix} = A^n N(0).$$

$$* N(n) = (PDP^{-1})^n N(0) = \underbrace{PD^{-1}P \overbrace{D^{-1}P}^I \overbrace{PD^{-1}P}^I \dots \overbrace{PD^{-1}P}^I}_{n \text{ fois}} N(0) = PD^n P^{-1} N(0)$$

car $P^{-1}P = I$ et $DI = D$.