

EXERCICE 1

Racine cubique d'une matrice

Vu dans le DS4, sujet "intermédiaire", avec des modifications. Par exemple, dans la Partie I, j'avais ajouté une ligne et une colonne à la matrice A, ce qui ajoutait la valeur propre -2 au spectre...

Partie I - Étude d'un exemple

Q1. $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 9X + 8 = (X - 1)(X - 8)$, donc $\text{Sp}(A) = \{1, 8\}$.

A admet deux valeurs propres distinctes et elle est de taille 2, donc elle est diagonalisable :

$$\text{il existe } P \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Q2. $B^3 = A \Leftrightarrow B^3 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}B^3P = (P^{-1}BP)^3 = D$, ce qui prouve l'équivalence souhaitée.

Q3. • Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^3 = D$, alors $\Delta D = \Delta \times \Delta^3 = \Delta^4 = D\Delta$.

• Donc Δ commute avec $D = \text{diag}(1, 8)$.

On peut raisonner avec des coefficients indéterminés $\Delta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La relation $\Delta D = D\Delta$ conduit à un système (4 équations, 4 inconnues mais beaucoup de zéros dans D ...) qui donne $b = c$.

L'autre méthode : Comme Δ commute avec D , les sous-espaces propres de D sont stables par Δ . La base canonique de $\mathbb{R}^2$ donne pour D une décomposition de $\mathbb{R}^2$ en somme directe des deux sous-espaces propres. Ceux-ci sont stables par Δ qui doit alors être diagonale par blocs, mais avec des blocs diagonaux de taille 1.

C/c : Donc Δ est nécessairement diagonale (parce qu'elle commute avec D).

Q4. • D'après Q3, si $\Delta^3 = D$ alors Δ est diagonale : $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta)$.

$$\text{Mais alors } \Delta^3 = \text{diag}(\alpha^3, \beta^3) = D \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 1 \\ \beta^3 = 8 \end{cases} \quad \text{Donc } \Delta^3 = D \Rightarrow \Delta = \text{diag}(1, 2).$$

Et la réciproque est évidente : si $\Delta = \text{diag}(1, 2)$, alors $\Delta^3 = \text{diag}(1, 8) = D$.

• D'après ceci et Q2 :

$$B^3 = A \Leftrightarrow (\Delta = P^{-1}BP \text{ est racine cubique de } D) \Leftrightarrow P^{-1}BP = \text{diag}(1, 2) \Leftrightarrow B = P \text{diag}(1, 2)P^{-1}.$$

L'ensemble des racines cubiques de A est donc un ensemble à un seul élément (singleton) :

$$\{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; B^3 = A\} = \{B_0\} \quad \text{avec} \quad B_0 = P \times \text{diag}(1, 2) \times P^{-1}.$$

Partie II - Dans un plan euclidien

Q5. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On reconnaît la forme générale des matrices orthogonales directes de taille 2.

2. L'endomorphisme $u \in L(E)$ associé à M dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E est la **rotation d'angle θ** .

Q6. D'après le cours, on sait que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, on a $(R(\alpha))^3 = R(3\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(3\alpha) & -\sin(3\alpha) \\ \sin(3\alpha) & \cos(3\alpha) \end{pmatrix}$.

En prenant $\alpha = \frac{1}{3}\theta$ dans la propriété précédente, on a : $(R(\frac{1}{3}\theta))^3 = M$. Donc $R(\frac{1}{3}\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{3}\theta) & -\sin(\frac{1}{3}\theta) \\ \sin(\frac{1}{3}\theta) & \cos(\frac{1}{3}\theta) \end{pmatrix}$ est une racine cubique de M .

Q7. Une matrice orthogonale de taille 2 et de déterminant -1 est une matrice de réflexion, donc de symétrie orthogonale : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $N = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, on a $N^2 = I_2$ (N est en particulier une matrice de symétrie), donc $N^3 = N$. Donc $N(\theta)$ est sa propre racine cubique (il y a peut-être d'autres racines cubiques, mais on a déjà au moins celle-ci).

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$.

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Contrairement au titre, on ne va pas du tout jusqu'à exprimer une racine cubique sous la forme d'un polynôme (en A). Dans le DS4, j'avais complété cette partie pour aboutir au résultat correspondant au titre ! On utilise alors les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\lambda_i \dots$ revoir le sujet et le corrigé du DS4, c'est un raisonnement classique.

Q8. $H_p(\lambda) = \lambda I_p$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $M_p(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda} I_p = H_p(\sqrt[3]{\lambda}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $(M_p(\lambda))^3 = \lambda I_p = H_p(\lambda)$.
Donc $\sqrt[3]{\lambda} I_p$ est une racine cubique de $H_p(\lambda)$ (là encore, il y en a peut-être d'autres).

Q9. • A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ comme valeurs propres (chaque valeur propre a une multiplicité supérieure ou égale à 1) donc

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_d}, \text{ avec } E_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On note $p_1, \dots, p_d$ les multiplicités respectives de $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ comme valeurs propres de A : les p_i sont des entiers naturels non nuls et ce sont aussi les dimensions respectives des sous-espaces propres.

On considère une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces propres. Ses p_1 premiers vecteurs forment une base de E_{λ_1} , les p_2 suivants forment une base de E_{λ_2} , etc. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers cette base de vecteurs propres (groupés par valeurs propres), on a bien $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{p_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{p_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_d, \dots, \lambda_d}_{p_d \text{ fois}}) = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} = D.$$

• Soit alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d}) \end{pmatrix}$.

On a $\Delta^3 = D$ donc $B^3 = PDP^{-1} = A$: B est une racine cubique de A .

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Q10. Comme on a supposé ici que A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A donc les valeurs propres de A sont toutes non nulles.

Q11. $z^3 = \lambda = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z^3 = (\sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3})^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3}}\right)^3 = 1$.

Les solutions complexes de l'équation $x^3 = 1$ étant 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{4i\pi/3}$, trois solutions distinctes on a donc :

$$z^3 = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow (z = \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} \text{ ou } z = \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} j = \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} e^{2i\pi/3} \text{ ou } z = \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} j^2 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} e^{4i\pi/3})$$

L'équation $z^3 = \lambda$ admet elle aussi trois solutions complexes distinctes.

Q12. D'après Q11, pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, comme $\lambda_k \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire :

$$X^3 - \lambda_k = (X - \sqrt[3]{\lambda_k})(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j)(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j^2), \text{ scindé à racines simples dans } \mathbb{C}$$

(pour tous les $\lambda_k \in \mathbb{R}^*$, argument θ nul). Par suite :

$$Q(X) \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^d [(X - \sqrt[3]{\lambda_k})(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j)(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j^2)] \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbb{C}.$$

Justification détaillée : Prenons deux racines quelconques de ce polynôme : $\sqrt[3]{\lambda_k} \alpha$ et $\sqrt[3]{\lambda_\ell} \beta$, avec $(k, \ell) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2$ et $(\alpha, \beta) \in \{1, j, j^2\}^2$.

Si $\sqrt[3]{\lambda_k} \alpha = \sqrt[3]{\lambda_\ell} \beta$, alors $\frac{\sqrt[3]{\lambda_k}}{\sqrt[3]{\lambda_\ell}} = \frac{\beta}{\alpha}$. Or $\frac{\sqrt[3]{\lambda_k}}{\sqrt[3]{\lambda_\ell}} \in \mathbb{R}^*$ donc $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \beta = \alpha$ (puisque $\beta, \alpha \in \{1, j, j^2\}$).

Finalement, on a $\sqrt[3]{\lambda_k} = \sqrt[3]{\lambda_\ell}$ soit $\lambda_k = \lambda_\ell$, donc $k = \ell$. Cela prouve bien que

si $k \neq \ell$ ou $\alpha \neq \beta$, alors $\sqrt[3]{\lambda_k} \alpha \neq \sqrt[3]{\lambda_\ell} \beta$.

Q13. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$, une racine cubique de A .

• A étant diagonalisable avec $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ comme valeurs propres, le polynôme $Q_1 = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$ est un polynôme scindé à racines simples annihilant A (c'est dans le cours, passer par une matrice D diagonale semblable à A et on a $Q_1(D) = 0$ semblable à $Q_1(A)$).

Alors $0 = \prod_{k=1}^d (A - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^d (B^3 - \lambda_k I_n) = S(B)$ avec $Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k)$ défini dans l'énoncé.

Le polynôme Q est un polynôme annulateur de B . Il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ d'après Q12, donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2

La fonction $\ln(\Gamma)$

Même constat que pour la partie III.1 de l'exercice 1 : il y a un titre faisant référence à $\ln \circ \Gamma$. C'est une fonction classique, dont l'étude repose sur celle de Γ , j'ai proposé $\ln \circ \Gamma$ dans le DS4, sujet "difficile". Ici, pas de fonction explicitement $\ln \circ \Gamma$ dans l'énoncé alors pourquoi avoir mis ce titre ? ?

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

$$\forall x > 0, u_n(x) = x \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{x}{n}).$$

Q14. Soit $x > 0$, $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \right) = \frac{x^2-x}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

On a ainsi, pour tout $x > 0$: $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$. Précisément, $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2-x}{2n^2}$ si $x^2 - x \neq 0$ (i.e. $x \neq 1$ puisqu'on a pris $x > 0$), et $u_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$ si $x = 1$.

La série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge absolument, donc converge. Ceci pour tout $x > 0$, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Q15. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations élémentaires : $x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n})$ est composée d'une fonction affine définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $]1, +\infty[$, et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$; $x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{n})x$ est une fonction linéaire donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x > 0$, $u'_n(x) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x}$.

$$u'_n(x) - \frac{x}{n(n+x)} = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \left(\frac{1}{n+x} - \frac{x}{n(n+x)} \right) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}.$$

• On pose donc $\varepsilon_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$ pour tout $x > 0$ et on a :

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \right) - \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$$

donc la série $\sum \varepsilon_n$ converge absolument, car $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge.

Q16. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in [a, b]$, $|u'_n(x)| \leq \left| \frac{x}{n(n+x)} \right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|$.

Or $x \leq b$ et $n+x \geq n+a > 0$ donc $|u'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$.

On en déduit que $\|u'_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n| \leq \frac{b}{n^2} + |\varepsilon_n|$.

Et la série de terme général $\sum \left(\frac{b}{n^2} + |\varepsilon_n| \right)$ converge (somme de deux séries convergentes), donc par comparaison,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|u'_n\|_{\infty}^{[a,b]} \text{ converge, i.e. } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n \text{ converge normalement sur } [a, b],$$

et ceci pour tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$ (on aurait aussi pu prendre tout intervalle $]0, b] \subset \mathbb{R}_+^*$).

Q17. $\varphi : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ d'après Q14 (avec aussi $x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$).

(i) • La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Comme $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \right)$$

(ii) • Soit $x > 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n(x+1) - u_n(x) &= (x+1-x) \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{x+1}{n}) + \ln(1 + \frac{x}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n+x+1}{n}) + \ln(\frac{n+x}{n}) \\ &= \ln(\frac{n+1}{n+1+x}) - \ln(\frac{n}{n+x}) \end{aligned}$$

• Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) - \varphi(x) &= -\ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) + \ln(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \\ &= \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(\frac{n+1}{n+1+x}) - \ln(\frac{n}{n+x}) \right) \end{aligned}$$

Or $\ln(\frac{n}{n+x}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$ donc la série télescopique $\sum_{n \geq 1} \left(\ln(\frac{n+1}{n+1+x}) - \ln(\frac{n}{n+x}) \right)$ converge et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(\frac{n+1}{n+1+x}) - \ln(\frac{n}{n+x}) \right) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\frac{n+1}{n+1+x}) \right) - \ln(\frac{1}{1+x}) = 0 + \ln(x+1)$$

Donc en reportant dans (*), on obtient bien la deuxième condition :

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x).$$

(iii) *Pour vérifier que φ' est croissante sur $]0, +\infty[$, on pourrait appliquer encore le théorème de dérivation des séries de fonctions pour montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et obtenir φ'' par une dérivation terme à terme de φ' . On en déduirait que $\varphi''(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$...*

Vérifions plutôt la croissance de φ' directement. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tel que $x \leq y$.

$$\text{Alors } \varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \text{ et } \varphi'(y) = -\frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(y).$$

$$\text{Or } 0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}$$

$$\text{et } u'_n(x) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x} \text{ avec}$$

$$0 < x \leq y \Rightarrow 0 < n+x \leq n+y \Rightarrow -\frac{1}{n+x} \leq -\frac{1}{n+y}$$

donc $u'_n(x) \leq u'_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit (puisque les deux séries convergent) : $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(y)$ et finalement

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, x \leq y, \varphi'(x) \leq \varphi'(y) \text{ donc } \varphi' \text{ est croissante sur }]0, +\infty[.$$

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Et comme $\ln(1) = 0$ on obtient bien :

$$\varphi(1) = 0.$$

C/c : La fonction φ vérifie les quatre conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Soit g une fonction quelconque vérifiant (C), et soit $h = \varphi - g$. D'après (i), g et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc h est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Q18. • Soit $x > 0$, alors $h(x+1) - h(x) = (\varphi(x+1) - \varphi(x)) - (g(x+1) - g(x)) = \ln(x) - \ln(x)$ car φ et g vérifient (ii) de (C).

Donc $h(x+1) - h(x) = 0$, i.e. $h(x+1) = h(x)$, ceci pour tout $x > 0$.

• Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et comme $x \mapsto x+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]1, +\infty[\subset]0, +\infty[$, $x \mapsto h(x+1) - h(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

De plus, cette fonction est identiquement nulle d'après le point précédent, donc en dérivant on a bien

$$\forall x > 0, h'(x+1) = h'(x).$$

Q19. • Soit $x \in]0, 1]$, soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$.

Or φ' et g' sont croissantes sur $]0, +\infty[$, d'après (iii) de (C), et $x \in]0, 1]$, $p > 0$, donc $0 < p \leq x+p \leq 1+p$.

Il en résulte : $\begin{cases} \varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p) \\ g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p) \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} \varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p) \\ -g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p) \end{cases}$

Finalement, en additionnant les deux encadrements du dernier système :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq \varphi'(x+p) - g'(x+p) = h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p).$$

• Pour tout $x > 0$, $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$ d'après (ii) de (C). Donc en dérivant cette égalité sur $]0, +\infty[$ on obtient la propriété (ii-bis) :

$$\forall x > 0, g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, en évaluant $p : g'(1+p) - g'(p) = \frac{1}{p}$. Alors

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = \varphi'(p) - (g'(p) + \frac{1}{p}) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

• On retranche $h'(p)$ à l'encadrement obtenu au premier point :

$$(\varphi'(p) - g'(1+p)) - h'(p) \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) - h'(p).$$

L'égalité obtenue dans le deuxième point donne : $-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) - h'(p)$.

On peut encore appliquer (ii-bis) à φ qui vérifie les conditions (C) aussi, donc $\varphi'(1+p) = \varphi'(p) + \frac{1}{p}$. En reportant on obtient :

$$-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \varphi'(p) + \frac{1}{p} - g'(p) - h'(p) = \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad |h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.$$

Q20. • D'après Q18, h' est 1-périodique sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc elle est constante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle est constante sur $]0, 1]$.

• Soit $x \in]0, 1]$. Avec Q18, on montre par récurrence que $h'(x+p) = h'(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

* La propriété est vraie au rang 1 d'après Q18.

* Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang p . Alors

$$h'(x+p+1) \underset{\text{Q18 pour } x+p}{=} h'(x+p) \underset{\text{HR}}{=} h'(x)$$

donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

• On a alors, d'après Q19 et avec le fait que h' soit 1-périodique :

$$|h'(x+p) - h'(p)| = |h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient par encadrement : $|h'(x) - h'(1)| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$. Par ailleurs, puisque $h'(x) - h'(1)$ ne dépend pas de p , on a par unicité de la limite :

$$h'(x) - h'(1) = 0 \quad \text{soit} \quad h'(x) = h'(1), \text{ ceci pour tout } x \in]0, 1].$$

Ainsi, h' est constante sur $]0, 1]$. Par périodicité, on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q21. • D'après Q20, h' est constante donc h est affine sur $]0, +\infty[$:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad h(x) = ax + b \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

• De plus, d'après Q18, h est également 1-périodique :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, a(x+1) + b = ax + b) \underset{\text{identification}}{\iff} \begin{cases} a = a \\ a + b = b \end{cases} \iff a = 0$$

Donc h est constante sur $]0, +\infty[$. Enfin, d'après (iv), $h(1) = 0$ car $\varphi(1) = g(1) = 0$. Donc h est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

$\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)\ln(2) + \varphi(\frac{x}{2}) + \varphi(\frac{x+1}{2}) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$

Q22. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $u_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(2n+1) - \ln(2n)).$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) - \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(2n).$$

La première somme est télescopique, elle vaut : $\frac{1}{2}(\ln(N+1) - \ln(1)) = \frac{1}{2}\ln(N+1).$

$$\sum_{n=1}^N \ln(2n+1) = \ln \left(\prod_{n=1}^N (2n+1) \right) = \ln \left(\frac{(2N+1)!}{2^N \times (N!)} \right)$$

produit
des impairs

$$\text{et } \sum_{n=1}^N \ln(2n) = \ln \left(\prod_{n=1}^N (2n) \right) = \ln(2^N \times N!).$$

$$\text{Finalement : } \sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\ln(N+1) - \ln \left(\frac{(2N+1)!}{2^N (N!)} \right) + \ln(2^N (N!)) \text{ et}$$

$$\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) \right) = \frac{\sqrt{N+1} 2^N (N!)}{(2N+1)! / (2^N (N!))} = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Q23. • $\psi(1) = \varphi(\frac{1}{2}) + \varphi(1) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = \varphi(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$ d'après (iv) de (C).

$$\text{Et } \varphi(\frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\frac{1}{2}) = \ln(2) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) \right).$$

• D'après Q22 et la formule de Stirling, $\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2^N \sqrt{2\pi N} (N/e)^N)^2}{2\sqrt{\pi N} (2N/e)^{2N}} = \frac{\pi N}{\sqrt{\pi N}} = \sqrt{\pi N}$ donc

$$\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \times \sqrt{\pi N} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi, $\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n(\frac{1}{2}) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc, en composant la limite par $\ln$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\frac{1}{2}) = \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{1}{2}\ln(\pi) - \ln(2) \text{ donc } \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Il en résulte : $\psi(1) = 0.$

Q24. (i) La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par opérations élémentaires (φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ etc.)

(ii) Pour tout $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = (x - (x-1))\ln(2) + \varphi(\frac{x+1}{2}) + \varphi(\frac{x+2}{2}) - \varphi(\frac{x}{2}) - \varphi(\frac{x+1}{2}) = \ln(2) + \varphi(\frac{x}{2} + 1) - \varphi(\frac{x}{2}) \underset{\text{(ii) pour } \varphi}{=} \ln(2) + \ln(\frac{x}{2}) = \ln(x).$

(iii) Pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi'(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\varphi'(\frac{x+1}{2}).$

Comme φ' est croissante, ainsi que $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$, on peut conclure que ψ' est croissante sur $]0, +\infty[.$

(iv) Enfin, on a vu $\psi(1) = 0$ en Q23

C/c : La fonction ψ vérifie les conditions (C). D'après la partie II, on en déduit que $\varphi = \psi$ sur $]0, +\infty[$ soit :

$$\forall x > 0, (x-1)\ln(2) + \varphi(\frac{x}{2}) + \varphi(\frac{x+1}{2}) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

EXERCICE 3

Temps d'attente avant une collision

$X_k \sim \mathcal{U}_{[1,n]}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $T_n = \min \{j \in [2, n+1] \mid \exists i \in [1, j-1], X_i = X_j\}$.

Partie I - Une expression de l'espérance de T_n

Q25. D'après l'énoncé, T_n prend des valeurs comprises entre 2 et $n+1$. Expliquons cela :

- Il faut au moins deux tirages pour obtenir deux fois le même numéro. Si le deuxième tirage donne le même numéro que le premier, i.e. $X_2 = X_1$, alors $T_n = 2$.
- L'urne contenant n boules, les n premiers tirages peuvent donner des numéros distincts (permutation de $[1, n]$ dans lui-même). Mais dans ce cas, le $(n+1)$ -ème tirage donne de manière certaine un numéro déjà obtenu, donc $T_n = n+1$.
- Pour tout entier $k \in [2, n+1]$, l'événement $T_n = k$ est réalisé si les $k-1$ premiers tirages donnent des numéros distincts (possible puisque $1 \leq k-1 \leq n$) et le k -ème donne un numéro déjà obtenu.

Les deux premiers points montrent que $T_n(\Omega) \subset [2, n+1]$ et, avec le troisième point, on a bien $T_n(\Omega) = [2, n+1]$.

Q26. $k \in [1, n]$ et $Z = (X_1, \dots, X_k)$ vecteur aléatoire à valeurs dans $[1, n]^k$ (puisque chaque X_i est à valeurs dans $[1, n]$)

Pour tout $z = (i_1, \dots, i_k) \in [1, n]^k$, $(Z = z) = ((X_1 = i_1) \cap \dots \cap (X_k = i_k))$, et les X_i sont indépendantes donc

$$P(Z = z) = P(X_1 = i_1) \times \dots \times P(X_k = i_k) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}.$$

On a donc : $P(Z = z) = \frac{1}{n^k}$ pour tout $z \in [1, n]^k$. Cela signifie que $Z \sim \mathcal{U}_{[1,n]^k}$.

Q27. • A est l'ensemble des k -uplets d'éléments de $[1, n]$ **sans répétition**. Le nombre d'éléments de A est le **nombre d'arrangements de k entiers compris entre 1 et n** . Donc

$$\text{Card}(A) = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = (k!)\binom{n}{k}.$$

• T_n prend une valeur strictement supérieure à k si et seulement si les k premiers tirages donnent des numéros différents. Avec les notations précédentes, on a donc $(T_n > k) = (Z \in A)$.

Et Z suit la loi uniforme sur $[1, n]^k$ donc $P(Z \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$.

Résultat valable pour $k = 0$ puisque $(T_n > 0)$ est l'événement certain et $\frac{n!}{(n-0)!} \frac{1}{n^0} = 1 = P(T_n > 0)$. On remarque aussi que la formule obtenue est cohérente dans le cas $k = 1$ car on a aussi $(T_n > 1)$ certain et $\frac{n!}{(n-1)!} \frac{1}{n^1} = \frac{n!}{n!} = 1$.

Q28. T_n étant une variable finie ($T_n(\Omega)$ est un ensemble fini), elle est d'espérance finie.

Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut appliquer la **formule d'antirépartition** :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n > k-1) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(T_n > \ell).$$

De plus, $(T_n > \ell)$ est impossible lorsque $\ell \geq n+1$ (la valeur maximale de T_n étant $n+1$) donc

$$E(T_n) = \sum_{\ell=0}^n P(T_n > \ell) \stackrel{\text{Q27}}{=} \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}.$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Parties II et III données au DS2, sujet PC, problème 2. J'avais posé $U_n = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}$ pour court-circuiter la partie de probas. De plus, dans la partie III, j'avais modifié Q36 car nous n'avions pas encore vu le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ (remplacé par l'application de la formule de Taylor avec reste intégral) et j'avais donné (admis) l'échange limite-intégrale demandé en Q38 car nous n'avions pas encore vu le théorème de convergence dominée.

Q29. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ et $f_k(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ car $t^{k+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, f_k est intégrable en $+\infty$ par comparaison. Finalement f_k est intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui signifie que

$$\text{l'intégrale } I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ converge absolument (donc converge).}$$

Q30. • Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $t^k \cdot (-e^{-t}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc on peut intégrer I_k par parties (intervalle $[0, +\infty[$) :

$$I_k = [t^k \cdot (-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} k t^{k-1} \cdot (-e^{-t}) dt = 0 + k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

On obtient donc la relation de récurrence : $I_k = k I_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

• Alors par itérations : $I_k = k \times (k-1) \times \dots \times 1 \times I_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ (intégrale de référence) donc il vient bien $I_k = k!$, formule valable également pour $k = 0$ finalement.

Je me permets d'utiliser une "itération" car le point de départ qui est la relation entre I_k et I_{k-1} n'est pas donné dans l'énoncé. Si l'énoncé était : "Montrer que pour tout $k \geq 1$, $I_k = k I_{k-1}$ puis que $I_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ", la rédaction de la récurrence serait nécessaire.

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in \mathbb{R}^+$. D'après la formule du binôme on a : $(1 + \frac{t}{n})^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{t^\ell}{n^\ell}$.

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} t^\ell e^{-t} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} f_\ell(t)$ avec la notation $f_\ell : t \mapsto t^\ell e^{-t}$.

On a vu en Q29 que les fonctions f_ℓ sont toutes intégrables sur $\mathbb{R}^+$, donc la combinaison linéaire FINIE obtenue ci-dessus est encore intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Toutes les intégrales convergent (absolument) et par linéarité de l'intégrale (somme FINIE encore) :

$$\int_0^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} f_\ell(t) \right) dt \stackrel{\text{somme FINIE}}{=} \sum_{\ell=0}^n \left(\binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} \int_0^{+\infty} f_\ell(t) dt \right) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} \ell!$$

Or $\binom{n}{\ell} \times \ell! = \frac{n!}{(n-\ell)!}$ pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc on a bien : $\int_0^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} = E(T_n)$.

Partie III - Un équivalent de l'espérance

$$I_n = \int_0^n (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt.$$

III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v = t - n$ dans l'intégrale J_n ($v = t - n \Leftrightarrow t = v + n$) :

$$J_n = \int_n^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{v+n}{n})^n e^{-v-n} dv = e^{-n} \int_0^{+\infty} (2 + \frac{v}{n})^n e^{-v} dv.$$

Q33. • Pour tout $v \geq 0$, $v \mapsto (1 + \frac{v}{2n})^n e^{-v}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et :

$0 \leq 1 + \frac{v}{2n} \leq e^{v/(2n)}$ d'après l'inégalité de convexité de l'exponentielle (énoncé) ;

donc $(1 + \frac{v}{2n})^n \leq e^{v/2}$ (la fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$),

et finalement $0 \leq (1 + \frac{v}{2n})^n e^{-v} \leq e^{-v/2}$ (en multipliant l'inégalité précédente par $e^{-v} > 0$).

Donc $|(1 + \frac{v}{2n})^n e^{-v}| \leq e^{-v/2}$, pour tout $v \geq 0$. Comme $v \mapsto e^{-v/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $v \mapsto (1 + \frac{v}{2n})^n e^{-v}$ est intégrable par comparaison. On peut maintenant intégrer l'inégalité :

$$0 \leq K_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{v}{2n})^n e^{-v} dv \leq \int_0^{+\infty} e^{-v/2} dv = 2.$$

C/c : On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n existe et $0 \leq K_n \leq 2$. La suite (K_n) est bien définie et bornée.

Q34. Avec l'expression obtenue en Q32, on peut encore écrire :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} [2(1 + \frac{v}{2n})]^n e^{-v} dv = 2^n e^{-n} K_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $J_n = (\frac{2}{e})^n K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}((\frac{2}{e})^n)$ car (K_n) est bornée.

Or $0 < \frac{2}{e} < 1$, donc $(\frac{2}{e})^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ (suite géométrique), donc la suite (J_n) converge vers 0 (car dominée par une suite convergente vers 0... ou par encadrement si on a écrit $0 \leq J_n \leq 2(\frac{2}{e})^n$).

III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On pose maintenant $f_n : u \mapsto \begin{cases} (1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } 0 < u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n} \end{cases}$

Q35. • $\int_0^{+\infty} f_n(u) du = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u) du = \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} du + 0.$

• On effectue le changement de variable $t = u\sqrt{n} \Leftrightarrow u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ dans I_n :

$$I_n = \int_0^n (1 + \frac{t}{n})^n e^{-t} dt = \int_0^{n/\sqrt{n}} (1 + \frac{u\sqrt{n}}{n})^n e^{-u\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} du = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} du.$$

Q36. Pour $0 < u < \sqrt{n}$, $f_n(u) = (1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} > 0$ donc on peut composer par $\ln$:

$$\ln(f_n(u)) = n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = n \left(\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \frac{u}{\sqrt{n}}\right).$$

On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ (développement en série entière).

Or $\frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[\subset]-1, 1[$ lorsque $u \in]0, \sqrt{n}[$ donc :

$$\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{(\sqrt{n})^k} = \frac{u}{\sqrt{n}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{(\sqrt{n})^k}$$

Finalement, en retranchant $\frac{u}{\sqrt{n}}$ et en multipliant par n :

$$\ln(f_n(u)) = n \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{k/2}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Q37. • Le terme correspondant à $k = 2$ dans la somme obtenue en Q36 est $\frac{(-1)}{2} \frac{u^2}{n^0} = -\frac{u^2}{2}$ donc

$$\ln(f_n(u)) = -\frac{u^2}{2} + n \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{(\sqrt{n})^k}.$$

On voit apparaître un reste de ce qui semble être une série alternée... Mais en est-ce bien une ? Et vérifie-t-elle bien les hypothèses du théorème ?

- (i) Pour $u \in]0, \sqrt{n}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u^k}{k n^{\frac{k}{2}}} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est bien une série alternée).
- (ii) La suite $\left(\frac{u^k}{(\sqrt{n})^k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante car $0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$, et positive. La suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est également décroissante et positive. Donc la suite $\left(\frac{(u/\sqrt{n})^k}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{u^k}{k n^{k/2}}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- (iii) $0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$ donc $0 \leq \frac{u^k}{k n^{k/2}} = \frac{1}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k \leq \frac{1}{k}$.
- Donc par encadrement : $\frac{u^k}{k n^{\frac{k}{2}-1}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Avec le résultat sur les restes du théorème spécial des séries alternées,

$$\left| \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{k/2}} \right| \leq \left| \frac{(-1)^2}{3} \frac{u^3}{n^{3/2}} \right| = \frac{|u|^3}{3n\sqrt{n}}$$

Donc $\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq n \frac{|u|^3}{3n\sqrt{n}} = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$ car $u > 0$.

• On a alors $\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} = \frac{u^2}{3} \times \frac{u}{\sqrt{n}}$.

Comme $0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$ et $\frac{u^2}{3} \geq 0$, on a $\frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leq \frac{u^2}{3}$.

On en déduit : $\ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leq -\frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{3} = \frac{-u^2}{6}$.

Q38. • $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $e^{-u^2/2} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc elle est intégrable en $+\infty$. Ainsi, $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

• On va appliquer le *théorème de convergence dominée* pour échanger la limite et l'intégrale :

(i) CVS : Soit $u > 0$ fixé. Pour n assez grand (précisément pour $n > u^2$), on a

$$f_n(u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - u\sqrt{n}\right)$$

Donc $f_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-u^2/2}$, pour tout $u > 0$: la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $u \mapsto e^{-u^2/2}$.

(ii) HD : Soit $u > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

* Si $n \in]0, \sqrt{n}[$, alors $0 \leq f_n(u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \leq e^{-u^2/6}$ d'après Q38.

* Si $u \geq \sqrt{n}$, alors $f_n(u) = 0 \leq e^{-u^2/6}$.

On obtient donc l'hypothèse de domination : $\forall u > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(u)| = f_n(u) \leq e^{-u^2/6}$, avec $u \mapsto e^{-u^2/6}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ de même que $u \mapsto e^{-u^2/2}$.

C/c : D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(u) du \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) \right) du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

III.3 - Conclusion

Q39. D'après Q31 et les notations de la partie III, $E(T_n) = I_n + J_n$.

D'après Q35 et Q38 : $\frac{I_n}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, donc $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

En particulier, $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Et d'après Q34, $J_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$.

Finalement : $E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} I_n + o(I_n)$ ce qui signifie que $E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

Enfin, d'après ce qu'on a pu voir plus haut : $E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.