

TRIGONOMETRIE

Exercice 1 Les questions sont indépendantes.

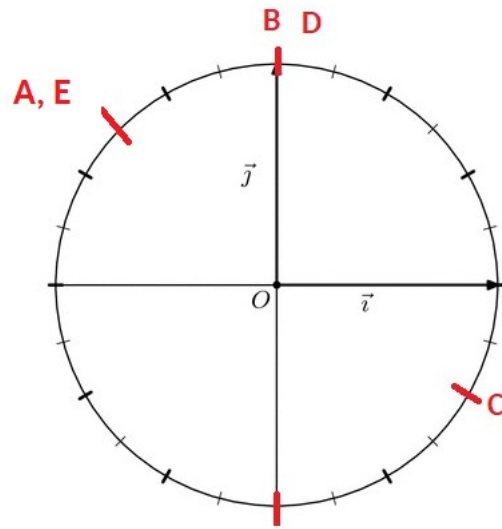
1) Placer les images A, B, C, D et E des nombres $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{89\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{91\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique. Dans quel cas les points images par enroulement des réels proposés sont-ils confondus ?

- Les deux points images confondus sont A et E, d'une

part, en effet : $\frac{91\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{88\pi}{4} = 22\pi$

- Ainsi que B et D, d'autre part, en

effet : $\frac{89\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{88\pi}{2} = 44\pi$



2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

a) Soit x un nombre réel, si $\cos(x)=0$ alors $\sin(x)=1$.

Pour tout réel x , $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Si $\cos(x)=0$ alors $\sin^2(x)=1$; ainsi $\sin(x)=1$ ou $\sin(x)=-1$.

Réponse : faux.

b) Il existe un réel x tel que $\sin(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, or $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Réponse : faux.

c) Pour tout réel x , $\cos(24\pi - x) + \cos(14836\pi + x) = 0$.

Pour tout réel x , la fonction cosinus étant périodique de période 2π et paire :

$$\cos(24\pi - x) + \cos(14836\pi + x) = \cos(-x) + \cos(x) = \cos(x) + \cos(x) = 2\cos(x)$$

Réponse : faux.

d) Sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$, l'équation $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ admet trois solutions.

Soit $x \in] -\pi ; \pi]$ tel que $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$;

$$2\cos(x) - \sqrt{3} = 0 \text{ équivaut à } \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}$$

L'équation $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ possède donc deux solutions.

Réponse : faux.

e) Sinus est positif sur l'intervalle $[-5\pi ; -4\pi]$.

Sur le cercle trigonométrique, -5π a le même point image que π et -4π a le même point image que 2π .

Or sur $[\pi ; 2\pi]$ la fonction sinus est négative.

Réponse : faux.

f) Soit $x \in [0 ; \pi]$ tel que $\sin(x) = \frac{4}{5}$, alors $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, ainsi,

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \text{ OU } \cos(x) = -\sqrt{1 - \sin^2(x)} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

Mais sur $[0 ; \pi]$, la fonction cosinus change de signe. En effet, $\cos(x) \geq 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

et $\cos(x) \leq 0$ sur $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$. Finalement, $\cos(x) \in \left\{-\frac{3}{5} ; \frac{3}{5}\right\}$

Réponse : faux.

3) a) Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$: $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Résoudre dans $[0 ; 5\pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation sont $\left\{\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6} ; \frac{19\pi}{6} ; \frac{29\pi}{6}\right\}$.

4) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

a) Quel est le signe de $\sin(x)$. Sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est positive.

b) Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin(x) \in \{-\sqrt{1 - \cos^2(x)} ; \sqrt{1 - \cos^2(x)}\}$.

Mais sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est positive, donc $\sin(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$

Finalement, $\sin(x) = \frac{4}{5}$.

APPLICATIONS DE LA DERIVATION

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$.

1) a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et pour tout réel x ,

$$\underline{f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12}$$

b) Vérifier que 3 est une racine de f' .

En effet : $f'(3) = 4 \times 3^3 - 6 \times 3^2 - 22 \times 3 + 12 = 4 \times 27 - 6 \times 9 - 66 + 12 = 120 - 120 = 0$

c) Factoriser $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = (x-3)P(x)$; où P est un polynôme à déterminer.

Comme 3 est racine de f' , on sait que f' peut s'écrire $f'(x) = (x-3)P(x)$, où P est un polynôme du second degré, donc, pour tout réel x ; $P(x) = ax^2 + bx + c$, les réels a , b et c étant à déterminer.

Cherchons donc a , b , c les réels tels que cette égalité soit satisfaite pour tout réel x :

• D'une part :

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c) \times (x-3) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$$

• D'autre part : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$,

Par comparaison terme à terme :

◦ $a = 4$ et $b-3a = -6$ donc $b-12 = -6$ d'où $b=6$

◦ $-3c = 12$ d'où $c = -4$ (ou $c-3b = -22$, d'où $c-18 = -22$, on a bien $c = -4$)

Enfinement, pour tout réel x , $P(x) = 4x^2 + 6x - 4$ et $f'(x) = (x-3)P(x) = (x-3)(4x^2 + 6x - 4)$.

d) Etudier, pour tout réel x , le signe de.

Calculons $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 36 + 64 = 100$; le polynôme P admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{100}}{8} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{100}}{8} = 0,5$$

x	$-\infty$	-2	$0,5$	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a

Ainsi $P(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty; -2] \cup [0,5; +\infty[$ et $P(x) \leq 0$ pour $x \in]-2; 0,5[$.

e) En déduire, pour tout réel x le signe de $f'(x)$.

Pour tout réel x ; $f'(x) = (x-3)P(x) = (x-3)(4x^2 + 6x - 4)$.

Dressons le tableau de signes pour f' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	$0,5$	3	$+\infty$		
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+		
Signe de $(x-3)$		-		0	+		
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Ainsi $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -2] \cup [0,5; 3]$

et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; 0,5] \cup [3; +\infty[$.

2. a) Dresser le tableau de variation de f sur $[-3; 3]$.

Dressons le tableau de variation de f sur $[-3; 3]$:

x	-3	-2	0,5	3		
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-	0
Variations de f	0					

$$\text{Avec } f(-3) = (-3)^4 - 2 \times (-3)^3 - 11 \times (-3)^2 + 12 \times (-3) = 0$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - 11 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) = -36$$

$$f(0,5) = (0,5)^4 - 2 \times (0,5)^3 - 11 \times (0,5)^2 + 12 \times (0,5) = \frac{49}{16} \quad \text{et}$$

$$f(3) = (3)^4 - 2 \times (3)^3 - 11 \times (3)^2 + 12 \times (3) = -36$$

b) La fonction f admet-elle des extrema sur l'intervalle $[-3; 3]$? Lesquels ?

D'après le tableau de variation de f :

- f' est négative sur $[-3; -2]$; s'annule en -2 , puis est positive sur $[-2; 0,5]$; de plus $f(-2) = -36$.

La fonction f admet donc comme minimum -36 atteint en -2 sur l'intervalle $[-3; 3]$.

- f' est positive sur $[-2; 0,5]$; s'annule en $0,5$; puis est négative sur $[0,5; 3]$; de plus $f(0,5) = \frac{49}{16}$

La fonction f admet donc comme maximum $\frac{49}{16}$ atteint en $0,5$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

3. a) Vérifier que -3 , 0 et 1 sont des racines de f .

$$\text{En effet } f(-3) = (-3)^4 - 2 \times (-3)^3 - 11 \times (-3)^2 + 12 \times (-3) = 0$$

$$f(0) = 0^4 - 2 \times 0^3 - 11 \times (0)^2 + 12 \times 0 = 0$$

$$f(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 - 11 \times 1^2 + 12 \times 1 = 0$$

b) Que représentent les points d'abscisses respectives -3, 0 et 1 ; pour C_f , la courbe représentative de la fonction f ?

Ces points ont tous pour ordonnée 0, ce sont des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

4. a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

Au point A(0 ; 0), l'équation de la tangente est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

Or $f'(0)=4\times 0^3-6\times 0^2-22\times 0+12=12$ et $f(0)=0$

Ainsi l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0, est $y=12x$.

b) Etudier, sur l'intervalle [-3 ; 3], la position relative de C_f et de T_0 .

Pour tout réel x , considérons la différence :

$$f(x)-12x=(x^4-2x^3-11x^2+12x)-12x=x^4-2x^3-11x^2=x^2(x^2-2x-11)$$

Le signe de cette différence est ce lui du polynôme $g(x)=x^2-2x-11$.

Son discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 48$; le polynôme g admet deux racines distinctes :

$x_1 = -2\sqrt{3}+1 \approx -2,46$ et $x_2 = 2\sqrt{3}+1 \approx 4,46$ (qui n'est pas dans l'intervalle d'étude).

Dressons le tableau de signes de g sur [-3 ; 3] :

x	-3	$-2\sqrt{3}+1$	3
Signe de $g(x)$	+	0	-
	signe de a		signe de -a

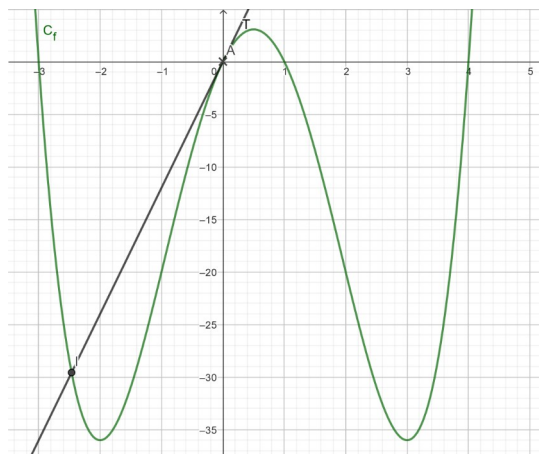
Nous en déduisons que

- $g(x) \leq 0$ pour $x \in [-2\sqrt{3}+1; 3]$;
- $g(x) \geq 0$ pour $x \in [-3; -2\sqrt{3}+1]$

Ainsi

- $f(x)-(12x) \geq 0$ pour $x \in [-3; -2\sqrt{3}+1]$; la tangente T_0 est en dessous de la courbe C_f ;
- $f(x)-(12x) \leq 0$ pour $x \in [-2\sqrt{3}+1; 3]$; la tangente T_0 est au dessus de la courbe C_f .

Remarque. Ci-contre C_f la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0, sur l'intervalle [-3 ; 3].



Exercice 3 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

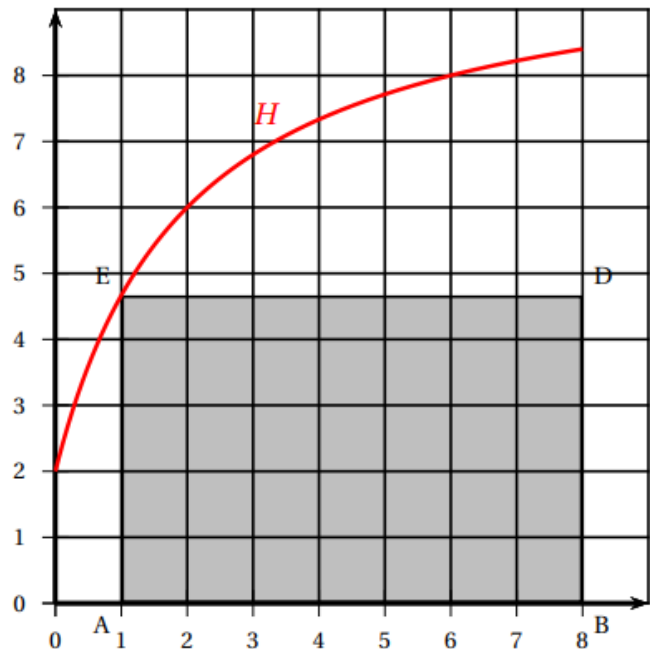
La courbe $\mathcal{H}$ représentée sur le graphique ci-dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation

$$y = \frac{10x+4}{x+2} \text{ avec } x \text{ appartenant à l'intervalle } [0 ; 8].$$

Pour toute abscisse x dans l'intervalle $[0 ; 8]$, on construit le rectangle ABDE comme indiqué sur la figure.

On donne les informations suivantes :

- A et B sont sur l'axe des abscisses
- A est d'abscisse x
- B et D ont pour abscisse 8
- E appartient à la courbe $\mathcal{H}$
- D et E ont la même ordonnée



L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles de x de l'intervalle $[0 ; 8]$ correspondant à un rectangle ABCD d'aire maximale.

1) a) Déterminer l'aire du rectangle ABCD lorsque $x=0$.

b) Déterminer l'aire du rectangle ABCD lorsque $x=4$.

2) On définit la fonction f qui à tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$ associe l'aire du rectangle ABCD.

On admet que l'expression de la fonction f définie sur $[0 ; 8]$ est donnée par : $f(x) = \frac{-10x^2 + 76x + 32}{x+2}$

. Répondre au problème posé.

Exercice 3

1) a) Pour $x=0$, on a $AB=8$ et $AE=2$.

- On peut lire graphiquement les coordonnées de E.
- L'équation de la courbe étant donnée, vérifions par le calcul :

Pour $x=0$, $y = \frac{10 \times 0 + 4}{0 + 2} = \frac{4}{2} = 2$. **ABDE a donc pour aire 16 unités d'aire.**

b) Pour $x=4$, $y = \frac{10 \times 4 + 4}{4 + 2} = \frac{44}{6} = \frac{22}{3}$.

Pour $x=4$, on a $AB=4$ et $AE = \frac{22}{3}$ et ainsi, **ABDE a pour aire : $4 \times \frac{22}{3} = \frac{88}{3}$ unités d'aire.**

2) On cherche pour quelle(s) valeur(s) de x , le rectangle ABDE a une aire maximale.

Pour cela, nous allons étudier les variations de la fonction f .

Pour tout $x \in [0; 8]$, $x+2 \neq 0$, la fonction f est donc dérivable sur $[0; 8]$ comme quotient des deux fonctions u et v , dérivables sur $[0; 8]$, v ne s'annulant pas sur $[0; 8]$, avec :

- $u(x) = -10x^2 + 76x + 32$ et $u'(x) = -20x + 76$
- $v(x) = x + 2$ et $v'(x) = 1$

Pour tout $x \in [0; 8]$:

$$f'(x) = \frac{(-20x + 76)(x + 2) - (-10x^2 + 76x + 32) \times 1}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-20x^2 - 40x + 76x + 152 + 10x^2 - 76x - 32}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x^2 - 40x + 120}{(x + 2)^2}$$

$(x + 2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que son numérateur $-10x^2 - 40x + 120$.

Nous reconnaissons une fonction polynôme du second degré, dont le discriminant est

$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-10) \times 120 = 6400$. $\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{6400}}{2 \times (-10)} = \frac{40 + 80}{-20} = -6 \notin [0; 8] \text{ et } x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{6400}}{2 \times (-10)} = \frac{40 - 80}{-20} = 2$$

x	0	2	8
Signe de $f'(x)$ ($a = -10 < 0$)	+	0	-
Variation de f			

$$\text{Où } f(2) = \frac{-10 \times 2^2 + 76 \times 2 + 32}{2 + 2} = \frac{144}{4} = 36.$$

Le rectangle atteint son aire maximale lorsque $x = 2$. Cette aire vaut 36 unités d'aire.

Remarque.

Autre procédé de recherche des racines de $x \mapsto -10x^2 - 40x + 120$:

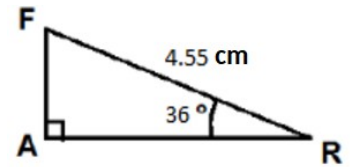
2 est une racine évidente. En effet, $-10 \times 2^2 - 40 \times 2 + 120 = 0$.

Soit x_2 la seconde racine. Le produit des racines est : $2 \times x_2 = \frac{120}{-10} = -12$. D'où $x_2 = -6$.

PRODUIT SCALAIRE

Exercice 4 Les questions sont indépendantes.

1) On considère le triangle RFA ci-contre, calculer $\vec{RA} \cdot \vec{RF}$



Dans le triangle RFA, rectangle en A, $\cos(\widehat{FRA}) = \frac{AR}{FR}$; ainsi $AR = FR \times \cos(\widehat{FRA}) = 4,55 \times \cos(36^\circ)$.

Le point A est le projeté orthogonal du point F sur la droite (AR), donc :

$$\vec{RA} \cdot \vec{RF} = \vec{RA} \cdot \vec{RA} = RA \times RA = (4,55 \times \cos(36^\circ))^2 \approx 13,55$$

Finalement, $\vec{RA} \cdot \vec{RF} = (4,55 \times \cos(36^\circ))^2$ (valeur exacte).

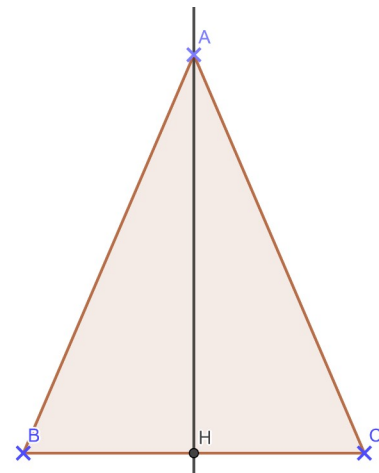
2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 6 cm. Soit H le projeté orthogonale de A sur (BC).

Faire une figure. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC), donc :

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = BH \times BC = 3 \times 6 = 18.$$

(BH= 3 cm car ABC étant isocèle en A, la hauteur issue de A est confondue avec la médiane issue de A et H est donc le milieu du segment [BC]).



Finalement, $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 18$.

3) Soient A, B, C des points tels que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6,01$ et AB=1,75 cm.

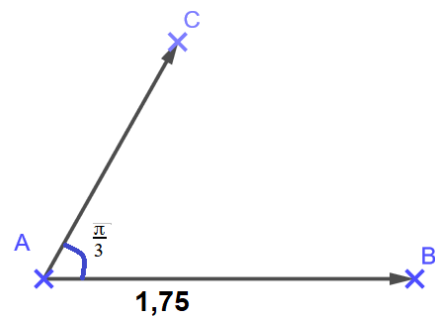
Déterminer la longueur AC.

On sait que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$

Ainsi

$$\|\vec{AC}\| = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \times \cos(\widehat{BAC})}$$

Donc
$$\|\vec{AC}\| = \frac{6,01}{1,75 \times 0,5} \approx 6,87$$



4) Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de coordonnées respectives $(10 ; 9)$ et $(3 ; 5)$. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{w} = x x' + y y' = 10 \times 3 + 9 \times 5 = 75$. On constate que $\vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0$; les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

5) Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de coordonnées respectives $(10 ; x)$ et $(3 ; 5)$. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ?

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 10 \times 3 + x \times 5 = 30 + 5x$.

On constate que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ si et seulement si $30 + 5x = 0$ si et seulement si $x = -6$

La valeur de x pour laquelle les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux est - 6.

Exercice 5 Les questions sont indépendantes.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}^2 = 3$; $\vec{w}^2 = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{w}\| = 9$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$, ainsi $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(9^2 - 3 - 4) = 37$.

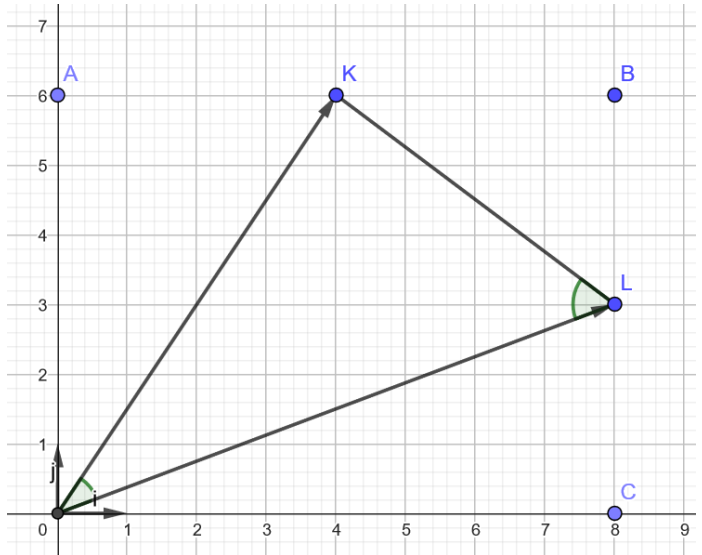
2) Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ tels que $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{w}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 6$.

Calculer :

- $\|-\frac{\sqrt{7}}{2}\vec{u}\|$; $\vec{u}^2$; $\vec{w}^2$; $(\vec{u} + \vec{w})^2$; $(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w})^2 - (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w})^2$
- $(5\vec{u} - \vec{w})(3\vec{u} + \vec{w})$;
- $\|-\frac{\sqrt{7}}{2}\vec{u}\| = \frac{\sqrt{7}}{2}\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{7}}{2} \times 4 = 2\sqrt{7}$;
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4^2 = 16$ et $\vec{w}^2 = \|\vec{w}\|^2 = 3^2 = 9$;
- $(\vec{u} + \vec{w})^2 = \|\vec{u} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 4^2 + 2 \times 6 + 3^2 = 37$
- $(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w})^2 - (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w})^2 = \vec{u}^2 + 2 \times \frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{w} + \frac{1}{4}\vec{w}^2 - (\vec{u}^2 - 2 \times \frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{w} + \frac{1}{4}\vec{w}^2)$
- $(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w})^2 - (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w})^2 = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 2\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 6 = 12$.
- $(5\vec{u} - \vec{w})(3\vec{u} + \vec{w}) = 15\vec{u}^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{w} - 3\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{w}^2 = 15\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{w}^2 = 15 \times 16 + 2 \times 6 - 9 = 243$;

Exercice 6

Soient A(0 ; 6) B(8 ; 6) et C(8 ; 0) trois points dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Soient K le milieu de [AB] et L le milieu de [BC].



- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{OK}$ et $\vec{OL}$.
- 2) Calculer le produit scalaire $\vec{OK} \cdot \vec{OL}$.
- 3) Calculer les normes des vecteurs $\vec{OK}$ et $\vec{OL}$.
- 4) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$
- 5) Déterminer la longueur KL.
- 6) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OLK}$

1) Les coordonnées du point K et celles du point L sont :

- $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = 4$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = 6$ pour K ; **ainsi K(4 ; 6).**
- $x_L = \frac{x_C + x_B}{2} = 8$ et $y_L = \frac{y_C + y_B}{2} = 3$ pour L ; **ainsi L(8 ; 3).**

Les coordonnées des vecteurs $\vec{OK}(x_K - x_O ; y_K - y_O) = (4 ; 6)$ et $\vec{OL}(x_L - x_O ; y_L - y_O) = (8 ; 3)$.

2) Calculons le produit scalaire $\vec{OK} \cdot \vec{OL}$:

$$\vec{OK} \cdot \vec{OL} = x \times x' + y \times y' = 4 \times 8 + 6 \times 3 = 50$$

3) Calculons les normes des vecteurs :

- $\|\vec{OK}\| = \sqrt{(x_K - x_O)^2 + (y_K - y_O)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$
- $\|\vec{OL}\| = \sqrt{(x_L - x_O)^2 + (y_L - y_O)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

4) Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$

$$\vec{OK} \cdot \vec{OL} = \|\vec{OK}\| \times \|\vec{OL}\| \times \cos(\widehat{KOL}) \quad \text{donc} \quad \cos(\widehat{KOL}) = \frac{\vec{OK} \cdot \vec{OL}}{\|\vec{OK}\| \times \|\vec{OL}\|} = \frac{50}{2\sqrt{13}\sqrt{73}}$$

Utilisons la touche « arcos » de la calculatrice ($\widehat{KOL} = \text{Arcos}(\frac{50}{2\sqrt{13}\sqrt{73}})$)

Finalement, $\widehat{KOL}$ est égal à 35,75° au centième près.

5) Déterminons la longueur KL.

Dans le triangle LBK, rectangle en B, appliquons le théorème de Pythagore,

$$KL^2 = KB^2 + BL^2, \text{ ainsi } KL = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

6) Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{OLK}$:

Dans le triangle OLK, appliquons la formule d'Al Kashi :

$$OK^2 = KL^2 + OL^2 - 2 KL \times OL \times \cos(\widehat{OLK}) ; \text{ ainsi } \cos(\widehat{OLK}) = \frac{OK^2 - KL^2 - OL^2}{-2 KL \times OL}$$

$$\text{Puis, } \cos(\widehat{OLK}) = -\frac{4 \times 13 - 25 - 73}{2 \times 5 \times \sqrt{73}} = \frac{4,6}{\sqrt{73}}. \text{ Utilisons la touche « arcos » de la calculatrice.}$$

Finalement, $\widehat{OLK}$ est égal à 57,43° au centième près.

Exercice 7

Soit la suite (v_n) définie tout entier naturel n , par $v_n = \frac{4n+1}{2n+3}$.

1) Etudier le sens de variations de la suite (v_n) .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la différence $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4(n+1)+1}{2(n+1)+3} - \frac{4n+1}{2n+3} = \frac{4n+5}{2n+5} - \frac{4n+1}{2n+3} = \frac{(4n+5)(2n+3) - (4n+1)(2n+5)}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{8n^2 + 12n + 10n + 15 - 8n^2 - 20n - 2n - 5}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{10}{(2n+3)(2n+5)}$$

- Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$; puis $v_{n+1} > v_n$; la suite (v_n) est strictement croissante.

2) Ecrire une fonction « seuil » en Python, qui renvoie le premier indice n pour lequel le terme v_n dépasse un seuil donné. Que renvoie « seuil(1.9) » ?

Script

```
1 def seuil(x):
2     k=0
3     u=1/3
4     while u < x:
5         k=k+1
6         u=(4*k+1)/(2*k+3)
7     return k+1
```

Console

```
Python 3.10.2 (main, Sep 15 2022 23:28:12)
Type "help", "copyright", "credits" or "license"
>>> # script executed
>>> seuil(1.9)
25
>>>
```