

Correction – Devoir surveillé n°2

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte

Exercice 1 : 6 points

On s'intéresse aux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8$$

1. a. Sans justifier, associer à chaque fonction sa courbe.

C_1 est la courbe représentative de f .

C_2 est la courbe représentative de g .

0,5 pt

- b. A partir du graphique, étudier la position relative des courbes de f et g .

On lit graphiquement que :

- C_f est située strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty; -2[$ et sur $]5; +\infty[$.
- C_f est située strictement en-dessous de C_g sur $]-2; 5[$.
- C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 5$.

0,75 pt

2. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 3x - 10$.

- a. Etudier le signe de h sur $\mathbb{R}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$$

0,75 pt

$\Delta > 0$ donc h admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \hline = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 1} & = \frac{3 + 7}{2} \\ \hline = \frac{3 - 7}{2} & = \frac{10}{2} \\ \hline = \frac{-4}{2} & = 5 \\ \hline = -2 & \end{array}$$

1,25 pt

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
Signe de $h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

car $a = 1$ est positif 1,25 pt

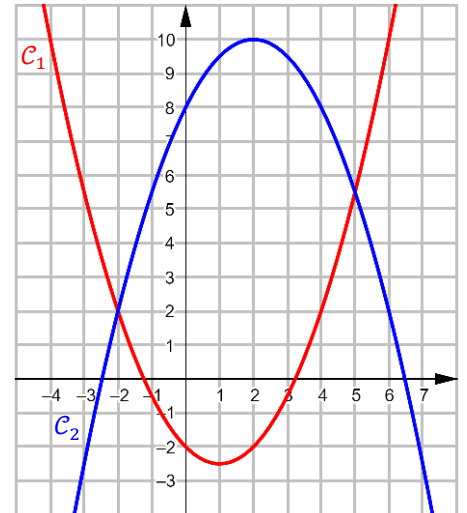
- b. En s'aidant de la question précédente, retrouver le résultat de la question 1b par le calcul.

C_f est située strictement au-dessus de C_g quand :

$$\begin{aligned} & f(x) > g(x) \\ \Leftrightarrow & f(x) - g(x) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}x^2 - x - 2 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 8 > 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 3x - 10 > 0 \\ \Leftrightarrow & h(x) > 0 \\ \Leftrightarrow & x \in]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi, C_f est située strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty; -2[$ et sur $]5; +\infty[$.

De la même façon, on obtient le reste de la question 1b. 1,5 pt



Exercice 2 : 9 points

Une compagnie d'assurance automobile propose deux types de contrat :

- un contrat tous risques dont le montant annuel est de 800 € ;
- un contrat de base dont le montant annuel est de 400 €.

En consultant le fichier clients de la compagnie, on recueille les données suivantes :

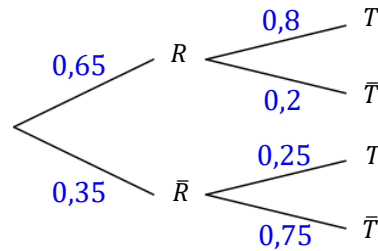
- 65% des clients possèdent un véhicule récent (moins de 10 ans). Sinon, le véhicule est ancien ;
- parmi les clients possédant un véhicule récent, 80% ont souscrit au contrat tous risques ;
- parmi les clients possédant un véhicule ancien, 25% ont souscrit au contrat tous risques.

On considère un client choisi au hasard. On note les événements suivants :

- R : « le client possède un véhicule récent » ;
- T : « le client a souscrit au contrat tous risques ».

1. Construire un arbre de probabilité traduisant cette expérience aléatoire.

1 pt



2. Déterminer la probabilité que le client possède un véhicule récent assuré tous risques.

$$\mathbb{P}(R \cap T) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(T) = 0,65 \times 0,8 = 0,52.$$

La probabilité que le client possède un véhicule récent assuré tous risques est de 0,52.

0,75 pt

3. Montrer que la probabilité que le client possède un contrat tous risques est de 0,6075.

Il faut donc montrer que $\mathbb{P}(T) = 0,6075$:

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(T) + \mathbb{P}(\bar{R}) \times \mathbb{P}_{\bar{R}}(T) \\ &= 0,65 \times 0,8 + 0,35 \times 0,25 \\ &= 0,52 + 0,0875 \\ &= 0,6075 \end{aligned}$$

1,25 pt

4. Les événements R et T sont-ils indépendants ? Justifier.

D'une part, $\mathbb{P}(T) = 0,6075$ (d'après q°3)

D'autre part, $\mathbb{P}_R(T) = 0,8$ (voir l'arbre q°1)

Comme $\mathbb{P}(T) \neq \mathbb{P}_R(T)$, alors les événements R et T ne sont pas indépendants.

0,75 pt

Les questions suivantes peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

5. Calculer $\mathbb{P}(R \cup \bar{T})$. Interpréter le résultat dans son contexte.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \cup \bar{T}) &= \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(\bar{T}) - \mathbb{P}(R \cap \bar{T}) \\ &= \mathbb{P}(R) + (1 - \mathbb{P}(T)) - \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(\bar{T}) \\ &= 0,65 + 1 - 0,6075 - 0,65 \times 0,2 \\ &= 0,9125 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait un véhicule récent ou un contrat de base est égale à 0,9125.

1,25 pt

6. Calculer la probabilité que le client ait un véhicule ancien, sachant qu'il est assuré tous risques.

Arrondir au centième.

$$\mathbb{P}_T(\bar{R}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{R} \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(\bar{R}) \times \mathbb{P}_{\bar{R}}(T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,35 \times 0,25}{0,6075} = \frac{35}{243} \simeq 0,14 \text{ (au centième)}$$

Il y a environ 14 % de chance que le client ait un véhicule ancien sachant qu'il est assuré tout risque.

1,25 pt

7. Déterminer la probabilité que le client ait une situation « cohérente », c'est-à-dire un contrat tous risques avec véhicule récent, ou bien un contrat de base avec véhicule ancien.

Notons C l'évènement : « le client possède une situation cohérente ».

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(T) + \mathbb{P}(\bar{R}) \times \mathbb{P}_{\bar{R}}(\bar{T}) \\ &= 0,65 \times 0,8 + 0,35 \times 0,75 \\ &= 0,52 + 0,2625 \\ &= 0,7825\end{aligned}$$

78,25 % des clients ont un contrat cohérent.

1,25 pt

8. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}_R(T)$ rendant les évènements R et T indépendants.

On cherche donc $\mathbb{P}_R(T)$ telle que $\mathbb{P}_R(T) = \mathbb{P}(T)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_R(T) &= \mathbb{P}(T) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_R(T) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(T) + \mathbb{P}(\bar{R}) \times \mathbb{P}_{\bar{R}}(T) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_R(T) &= 0,65 \times \mathbb{P}_R(T) + 0,35 \times 0,25 \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_R(T) - 0,65\mathbb{P}_R(T) &= 0,12 \\ \Leftrightarrow 0,35\mathbb{P}_R(T) &= 0,0875 \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_R(T) &= \frac{0,0875}{0,35} = 0,25\end{aligned}$$

Ainsi, les évènements R et T sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_R(T) = 0,25$.

1,5 pt

Exercice 3 : 5 points

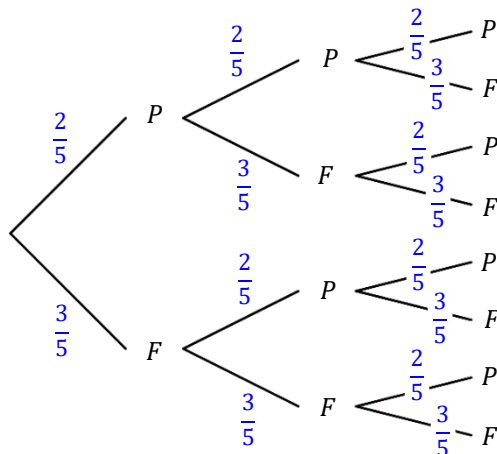
On lance trois fois de suite une même pièce truquée.

A chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est de deux chances sur cinq.

Pour chaque lancer, on note P l'évènement « obtenir Pile » et F l'évènement « obtenir Face ».

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Dresser un arbre de probabilité à trois niveaux modélisant la situation.



1 pt

2. On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire. Recopier et compléter : $\Omega = \{PPP; PPF \text{ etc } \dots\}$

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

1 pt

3. Donner la probabilité d'obtenir deux fois Pile puis une fois Face.

La probabilité d'obtenir deux fois Pile puis une fois Face vaut :

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$$

0,75 pt

4. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.

La probabilité d'obtenir exactement une fois Pile est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(PFF) + \mathbb{P}(FPF) + \mathbb{P}(FFP) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times 3 = \frac{54}{125}\end{aligned}$$

1 pt

5. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile.

L'évènement contraire de cet évènement est « obtenir trois fois Face ».

La probabilité d'obtenir au moins une fois Pile est donc égale à :

$$1 - \mathbb{P}(FFF) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$$

1,25 pt

Bonus : 0,5 pt Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x^2 + x - 1)(-x^2 + x - 1) < 0$

- Etudions les racines de $2x^2 + x - 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$$

$\Delta > 0$ donc ce polynôme admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l}x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\= \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} & = \frac{-1 + 3}{4} \\= \frac{-1 - 3}{4} & = \frac{2}{4} \\= -\frac{4}{4} & = \frac{1}{2} \\= -1 & \end{array}$$

- Etudions les racines de $-x^2 + x - 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 1 - 4 = -3$$

$\Delta < 0$ donc ce polynôme n'admet pas de racine réelle.

- On obtient alors le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
Signe de $2x^2 + x - 1$	+	0	-	0	+
Signe de $-x^2 + x - 1$	-		-		-
Signe de $(2x^2 + x - 1)(-x^2 + x - 1)$	-	0	+	0	-

car $a = 2$ est positif

car $a = -1$ est négatif

- Conclusion :

$$(2x^2 + x - 1)(-x^2 + x - 1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; -1[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$