

limites, epsilon, dérivée, équa diff

Exercice 1. Prouver, avec la définition de limite utilisant ε, α les propriétés suivantes :

Soit f, g deux fonctions définies près du réel a de limite respective en a : ℓ, m .

La somme $f + g$ a pour limite la somme des deux limites, le produit a pour limite le produit des limites.

Si $m \neq 0$ alors le quotient $\frac{f}{g}$ a pour limite $\frac{\ell}{m}$

Exercice 2. Admettant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ Montrer que la fonction sinus est dérivable en zéro puis, à l'aide des formules de trigonométrie et de la définition de dérivée, recalculer la dérivée en tout réel a des fonctions sinus, et cosinus.

Exercice 3. Déterminer les ensembles de définition maximum dans $\mathbb{R}$ de f puis de f' ; et calculer f' la dérivée de f :

(a) $f(x) = \frac{1}{x} (\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2})$

(b) $f(x) = \sqrt{x(x+1)} - \sqrt{x(x-1)}$

(c) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}$ (d) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x}$ (e) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

(g) $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

(i) $f(x) = \ln \left(\frac{|x+2|}{|x-1|^3} \right)$ (j) $f(x) = \ln(|\tan(\frac{x}{2})|)$

(k) $f(x) = \ln(|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|)$ (l) $f(x) = \ln(|x + \sqrt{x^2 + h}|)$ h réel donné.

Exercice 4. Déterminer les primitives des fonctions suivantes, en précisant les intervalles de définition possibles.

(1) $f(x) = \frac{1}{(\sin x)^2}$ (2) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ (3) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}$ (5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5}$ (7) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(8) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

(11) $f(x) = x \ln(x)$

(14) $f(x) = (x+1)e^{1-2x}$

(16) $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)}$

(18) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

(9) $f(x) = xe^x$ (10) $f(x) = \ln(x)$

(12) $f(x) = (x-1)e^x$

(15) $f(x) = \frac{1}{(e^x + 2)^2}$ (avec $t = e^{-x}$)

(17) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

poser $u = \sqrt{1+e^x}$

Exercice 5. Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

1) $x \mapsto \sin x - \cos x, I = [0, \frac{\pi}{4}]$ 2) $x \mapsto x \ln x, I = [1, +\infty[$

3) $e^{3x^2-1} \cos \left(\frac{\pi}{2(x^2+1)} \right), I = \mathbb{R}$ 4) $x \mapsto \exp \left(1 - \frac{1}{1 + \ln^2 |x|} \right), I = \mathbb{R}^*$

Exercice 6. Intégrer sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$:
 $xy' - 2y = 0$.

Exercice 7. Résoudre :
 $x \ln(x)y' + y = xe^x$

Exercice 8. Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle :
 $(1-x)^2 y' = (2-x)y$ sur $] -1, 1[$
Peut-on définir une solution sur un intervalle plus grand ? valant 1 en 0 ?

Exercice 9. Intégrer
 $(1+x^2)^2 y' + 2xy = xe^{1/(1+x^2)}$.
Trouver la solution définie sur $\mathbb{R}$ qui est nulle en 0.

Exercice 10. Intégrer, pour $x > 0$,
 $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

Exercice 11. Intégrer sur un intervalle quelconque $xyy' + x^2 + y^2 = 0$.

Exercice 12. Intégrer sur $I =]1, +\infty[$: $(\ln x)y' - \frac{1}{x}y + 2xy^2 = 0$
(on pourra poser : $z = 1/y$) .