

FEUILLE DE TD 2 - Matrices (1ère partie)

Exercice 1

Effectuer les produits de matrices suivants :

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^3

4.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Montrer $X^n = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire toutes les matrices qui commutent avec A .

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice X non nulle telle que $A.X = O$ et une matrice Y telle que $Y.A = O$ (où O est la matrice nulle d'ordre 2).

Trouver ensuite une matrice B non nulle d'ordre 2 telle que $B^2 = O$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $A = B + 2I_2$, calculer B^2 . Remarquer que B et $2I_2$ commutent et calculer A^n à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 5

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ?

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; 2) B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; 3) C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}; 4) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}. \text{ Vérifier que } A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = O \text{ et en déduire } A^{-1}.$$

Exercice 9

$$\text{Résoudre } \begin{cases} 8x + 5y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases} \text{ En déduire l'inverse de } B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Résoudre enfin } BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$