

Cahier de calcul pour ECG

Table des matières

1	Calculs algébriques	2
1.1	Calculs de fractions	2
1.2	Calculs sur les racines carrées	3
1.3	Calculs de puissances	5
1.4	Calculs avec les logarithmes et exponentielles	6
1.5	Polynômes et fractions de terminale	7
1.6	Calculs avec les quantités conjuguées	9
1.7	Calculs sur les fonctions trigonométriques	10
2	Équations	11
3	Inéquations	13
4	Systèmes d'équations linéaires	15
5	Conjecture	15
6	Logique	17
7	Sommes et produits	20
7.1	Sommes usuelles	20
7.2	Produits	22
7.3	Binôme de Newton	23
7.4	Sommes doubles	24
8	Suites	24
8.1	Monotonie	24
8.2	Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques	25
8.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	25
8.4	Déterminer le terme général	26
8.5	Calcul de limites	26
9	Analyse réelle	28
9.1	Graphes de fonctions	28
9.2	Inégalités	30
9.3	Calcul de limites	30
9.4	Continuité	30
9.5	Dérivation	30
9.6	Primitives et intégrales	31
10	Probabilités	34
11	Algèbre	34
11.1	Polynômes	34
11.2	Polynômes de degré 2	34
11.3	Polynômes	36
11.4	Matrices	37

12 Python	38
12.1 Comprendre un script	38
12.2 Comprendre et compléter un script	42
12.3 Écrire une fonction	43

1 Calculs algébriques

1.1 Calculs de fractions

Exercice 1.1.1 Somme de fractions

Fractions Calculer sous la forme d'une seule fraction :

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ | 4. $\frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3}$ | 7. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ |
| 2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ | 5. $\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$ | 8. $\frac{1}{n^2+3} - \frac{1}{n+3}$ |
| 3. $1 - \frac{2}{3}$ | 6. $\frac{n}{n+3} - \frac{n+2}{n+1}$ | 9. $\frac{1}{n^2-9} - \frac{1}{n+3}$ |

Exercice 1.1.2 Somme de fractions

Calculer sous la forme d'une seule fraction :

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ | 6. $\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ |
| 2. $\frac{1}{6} - \frac{1}{9}$ | 7. $\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+3)^2}$ |
| 3. $6 - \frac{2}{7}$ | 8. $\frac{1}{n^2-4} - \frac{1}{n+2}$ |
| 4. $3 + \frac{2n+1}{n+3}$ | 9. $\frac{1}{n^2-4} - \frac{1}{n+3}$ |
| 5. $\frac{1}{n+3} - \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ | 10. $\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ |

Exercice 1.1.3 Produit et quotient de fractions

Calculer sous la forme d'une seule fraction :

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ | 4. $\frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{8}{3}}$ | 7. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{8}{3}}$ |
| 2. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ | 5. $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}}$ | 8. $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{3}{8}}$ |
| 3. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{3}}$ | 6. $\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{4 - \frac{1}{n+2}}$ | 9. $\frac{\frac{1}{n+2} - \frac{3}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}}$ |

Exercice 1.1.4 Calculs de fractions

Calculer :

1. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$
2. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$
3. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$
4. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$
5. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$
6. $\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+2}{n+5} - \frac{n+3}{n+4} \times \frac{n+4}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 1.1.5 Changement d'écriture

Sur le modèle du calcul suivant : $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$, compléter les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n-1} &= 1 + \frac{?}{??} \\ \frac{n+2}{n+1} &= 1 + \frac{?}{??} \\ \frac{n+1}{n^2+4} &= n + \frac{?}{??} \\ \frac{n+1}{3n^2+1} &= 3n + \frac{?}{??} \\ \frac{n+2}{n+3} &= \frac{1}{n} + \frac{?}{??} \end{aligned}$$

Exercice 1.1.6 Factorisations forcées

Sur le modèle des calculs suivants :

$$\frac{n+3}{n+1} = \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \text{ et } \frac{n^2+3}{2n+1} = \frac{n^2(1+\frac{3}{n^2})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{n(1+\frac{3}{n^2})}{2+\frac{1}{n}},$$

compléter les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{n^2+3n+5}{n+1} &= \frac{n^2(\quad ? \quad)}{n(\quad ?? \quad)} = \frac{???}{????} \\ \frac{n^2+3n+5}{n^2+1} &= \frac{n^2(\quad ? \quad)}{n^2(\quad ?? \quad)} = \frac{???}{????} \\ \frac{n^3+3n+5}{n^4+n^2+1} &= \frac{n^3(\quad ? \quad)}{n^4(\quad ?? \quad)} = \frac{???}{????} \\ \frac{3n^3-2n+7}{3n^4+2n^2-1} &= \frac{n^3(\quad ? \quad)}{n^4(\quad ?? \quad)} = \frac{???}{????} \\ \frac{3n^2-2n+7}{3n^4+2n^2-1} &= \frac{?}{??} = \frac{???}{????} \\ \frac{4n^2-2n+5}{2n^3+2n^2-1} &= \frac{?}{??} = \frac{???}{????} \end{aligned}$$

Exercice 1.1.7 D

Exercice 1.1.8 D

Exercice 1.1.9 D

1.2 Calculs sur les racines carrées

Exercice 1.2.1 Calculs sur les racines carrés

Racines Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------|
| 1. $\sqrt{9}$ | 5. $\sqrt{3} \times 4\sqrt{6}$ | 8. $(3\sqrt{2})^2$ |
| 2. $\sqrt{8}$ | 6. $\sqrt{3} + 4\sqrt{12}$ | |
| 3. $\sqrt{(-2)^2}$ | 7. $(2\sqrt{3})^2$ | 9. $(5\sqrt{2})^2$ |
| 4. $\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ | | |

Exercice 1.2.2 Calculs sur les racines carrés

Simplifier sous la forme $a\sqrt{b} + c$ avec a , b et c entiers.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\sqrt{3} \times (4 + \sqrt{3})$ | 4. $(2 + \sqrt{3}) \times (4 + \sqrt{3})$ |
| 2. $\sqrt{3} \times (4 + \sqrt{3})$ | 5. $(2 + \sqrt{3}) \times (-4 + \sqrt{3})$ |
| 3. $\sqrt{3} \times (-4 + \sqrt{3})$ | 6. $(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})$ |

Exercice 1.2.3 Calculs sur les racines carrés

Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a rationnel et b entier.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 4. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ |
| 2. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ | 5. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ |
| 3. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ | 6. $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}$ |

Exercice 1.2.4 Calculs sur les racines carrés

Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a rationnel et b entier.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ |
| 2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | 5. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 3. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ | 6. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ |

Exercice 1.2.5 Calculs sur les racines carrés

Simplifier :

- | | |
|--|--|
| 1. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | 3. $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ |
| 2. $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | 4. $\left(\frac{5}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \left(\frac{5}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ |

Exercice 1.2.6 Calculs sur les racines carrés

Simplifiez les expressions suivantes sous la forme $x + y\sqrt{3}$ où x et y sont des rationnels

$$1. \ 3 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$$

$$3. \ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

$$5. \ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}$$

$$2. \ 1 + \frac{2}{1 - \sqrt{3}}$$

$$4. \ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{18}}}$$

$$6. \ 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \sqrt{27}}}}$$

1.3 Calculs de puissances

Puissances

Exercice 1.3.1 Calculs de puissances 1

Calculer :

$$1. \ 3^4$$

$$4. \ (-2)^4$$

$$2. \ 4^3$$

$$5. \ (-4)^3$$

$$3. \ 2^{10}$$

$$6. \ (-2)^{10}$$

Exercice 1.3.2 Calculs de puissances

Calculer sous la forme d'une seule puissance :

$$1. \ 2^3 \times 5^3$$

$$4. \ (-2)^{10} \times (-2)^{-7}$$

$$2. \ 10^2 \times 3^2$$

$$5. \ 4^3 \times 2^7$$

$$3. \ 2^3 \times (-4)^3$$

$$6. \ (-2)^{10} \times (2)^{-7}$$

Exercice 1.3.3 Calculs de puissances, priorités

Calculer et donner la valeur numérique de :

$$1. \ 2 \times 3^4$$

$$4. \ 2^7 \times 5^6$$

$$2. \ 2^3 \times 5^3$$

$$5. \ 10^2 + 3^2$$

$$3. \ 101 \times 99$$

$$6. \ 1001 \times 999$$

Exercice 1.3.4 Simplifications de puissances

Simplifier sous la forme d'une seule puissance :

$$1. \ n^3 \times 2^3$$

$$4. \ x^3 \times (-y)^3$$

$$2. \ 2^{n+3} \times 2^n$$

$$5. \ x^3 \times (-y)^{-3}$$

$$3. \ n^3 \times \frac{n^5}{(n+2)^8}$$

$$6. \ x^{-4} \times (-y)^4$$

Exercice 1.3.5 Calcul sur les puissances

Donner dans chaque cas le résultat sous la forme d'une puissance de 10 :

$$1. \ 10^3 \times 10^5$$

$$5. \ \frac{10^3}{10^{-2}}$$

$$8. \ (10^5)^2$$

$$2. \ 10^3 \times 10^{-5}$$

$$6. \ \frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2 \times 10^{-1}}$$

$$9. \ \frac{10^7 \times 10^5}{10^{-2} \times 10^{-3}}$$

$$3. \ (10^3)^3$$

$$7. \ \frac{10^{-3}}{10^{-2}}$$

$$10. \ \frac{10^2 \times (10^3)^4}{(10^{-2})^5 \times 10^{-3}}$$

$$4. \ 10^3 \times 10^5 \times 10^{-2}$$

Exercice 1.3.6 D**Exercice 1.3.7 D****Exercice 1.3.8 D****1.4 Calculs avec les logarithmes et exponentielles****Exercice 1.4.1 Calculs sur les logarithmes**

a et b sont strictement positifs, simplifier et exprimer en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$:

1. $\ln(a \times b) =$
2. $\ln(a^3) =$
3. $\ln(a^3 \times b^2) =$
4. $\ln(a^3 \times b^{-4}) =$
5. $\ln\left(\frac{a^3}{b^5}\right) =$
6. $\frac{\ln(a^3)}{\ln(b^{-5})} =$

Exercice 1.4.2 Calculs sur les logarithmes

Exprimer en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(8) + \ln(2) =$
2. $\ln(2^{10}) - \ln(2) =$
3. $\ln(2^5) - \ln(4) =$
4. $\frac{\ln(2^3)}{\ln(2^{-3})} =$
5. $\frac{\ln(2^5)}{\ln(2^3)} =$
6. $\ln\left(\frac{2^5}{2^{-5}}\right) =$

Exercice 1.4.3 Calculs sur les exponentielles

Simplifier sous la forme d'une seule exponentielle :

1. $e^8 \times e^{3x+2} =$
2. $\frac{e^8}{e^x} =$
3. $\frac{e^{8+2x}}{e^{x+1}} \times e^{4x-2} =$
4. $\frac{e^{-8+2x}}{e^{x-2}} \times e^{3x-5} =$
5. $\frac{e^{-8+2x}}{e^{-x-3}} \times \frac{e^{-3+5x}}{e^{2x+2}} =$
6. $e^{-2} \times e^{3x+2} =$

Exercice 1.4.4 Calculs sur les exponentielles et logarithmes

Simplifier :

1. $e^{\ln(3x+2)} =$
2. $e^{3\ln(x)} =$
3. $e^{3\ln(x)-4\ln(y)} =$
4. $\ln(e^{2x+5}) =$
5. $\ln\left((e^{2x+5})^7\right) =$
6. $e^{-\ln(2)} + e^{\ln(9)} =$

Exercice 1.4.5 Calculs sur les exponentielles et logarithmes

Écrire les puissances sous la forme d'une exponentielle :

1. $a^b = \exp(?)$
2. $(2x+1)^3 = \exp(?)$
3. $\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n = \exp(?)$
4. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(?)$
5. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \exp(?)$
6. $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2+3n+5} = \exp(?)$

Exercice 1.4.6 Calculs sur les exponentielles et logarithmes - écrivain 2022

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch , en posant, pour tout réel x :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1$$

1.5 Polynômes et fractions de terminale

Exercice 1.5.1 Développement et identités remarquables 1

Développer les expressions suivantes :

- | | | |
|--------------|----------------|--------------|
| 1. $(x+1)^2$ | 3. $(2x+3)^2$ | 5. $(1+x)^3$ |
| 2. $(y-2)^2$ | 4. $(2x-3y)^2$ | 6. $(x-1)^3$ |

Exercice 1.5.2 Développement et identités remarquables 2

Développer les expressions suivantes :

- | | | |
|---------------|-----------------|----------------|
| 1. $(3x+1)^2$ | 3. $(3x+5)^2$ | 5. $(-1+2x)^3$ |
| 2. $(2y-2)^2$ | 4. $(-2x+3y)^2$ | 6. $(3x-2)^3$ |

Exercice 1.5.3 Développement et identités remarquables 3

Développer les expressions suivantes :

- | | | |
|-------------------|---------------------------------|---------------------|
| 1. $(3x+1)(3x-1)$ | 3. $(3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$ | 5. $(-1+2x)(1-2x)$ |
| 2. $(2y-2)(y+1)$ | 4. $(-2x+3y)(2x+3y)$ | 6. $(-1+2x)(-1-2x)$ |

Exercice 1.5.4 Factorisations et identités remarquables 1

Factoriser les expressions suivantes :

- | | | |
|-------------------------|---------------------|----------------|
| 1. $(3x+1)^2 + x(3x+1)$ | 3. $x+y+2\sqrt{xy}$ | 5. n^2-6n+9 |
| 2. y^2+x^2+2xy | 4. n^2+6n+9 | 6. $4n^2-8n+4$ |

Exercice 1.5.5 Factorisations et identités remarquables 2

Factoriser les expressions suivantes :

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. $(3x+1)^2 - (3x+1)^2$ | 3. $(2-5x)^2 - (3x+2)^2$ | 5. $(-2+5x)^2 - (3x+2)^2$ |
| 2. $(2-x)^2 - (3x+1)^2$ | 4. $(2-5x)^2 - (-3x+2)^2$ | |

Exercice 1.5.6 Factorisations et identités remarquables 3

En vous servant de la relation :
pour tous réels a et b , on a : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; et de la relation
pour tous réels a et b , on a : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ factoriser les expressions
suivantes :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1. $(1 + 2x)^3 + (3x + 2)^3$ | 5. $(5x + 1)^3 - (3x - 2)^3$ |
| 2. $(-2 + 5x)^3 - (3x + 2)^3$ | 6. $(1 + 2x)^3 - 8$ |
| 3. $(-2 + 7x)^3 - (-3x + 2)^3$ | 7. $(1 + 2x)^3 + 1$ |
| 4. $(-2 + 7x)^3 + (-3x + 2)^3$ | |

Exercice 1.5.7 Factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

1. $n^2 + 4n + 4 - (n + 2)(4n + 1) =$
2. $(n + 4)(n + 3) - (n + 3)^2(4n + 1) =$
3. $(n + 4)(n + 3) - (n^2 - 9)(4n + 1) =$
4. $(n + 4)(n + 3)^2 - (n^2 - 9)(4n + 1) =$
5. $(n + 4)(n + 3) + (n^2 - 9)^2(5n + 2) =$
6. $(n + 4)(n + 3)^2 + (n^2 - 9)^2(5n + 2) =$
7. $(n + 4)(n + 3)^3 + (n^2 - 9)^2(5n + 2) =$
8. $n^2 - 4n + 4 - (n + 2)(n - 2) =$
9. $(n + 4)(n + 3) - (n + 3)^2(4n^2 - n + 3) =$

Exercice 1.5.8 Développements 1

Développer les expressions suivantes :

1. $(n + 2)(4n + 1) =$
2. $(n + 4)(n - 3) =$
3. $(n^2 - 9)(4n + 1) =$
4. $(n - 4)(3n + 5)^2 =$
5. $(n^2 - 9)^2(5n + 2) =$
6. $(n + 4)(n + 3) - 3(n + 4)(5n + 2) =$
7. $(n + 1)(n^2 + 5n - 2) + (n^2 - 5)(5n + 2) =$
8. $(n + 1)^3 - (n - 5)(-5n + 2) =$

Exercice 1.5.9 Développements 2

Développer les expressions suivantes :

1. $(n + 2)(4n + 1) =$
2. $(n + 4)(n - 3) =$
3. $(n^2 - 9)(4n + 1) =$
4. $(n - 4)(3n + 5)^2 =$
5. $(n^2 - 9)^2(5n + 2) =$
6. $(n + 4)(n + 3) - 3(n + 4)(5n + 2) =$

7. $(n+1)(n^2+5n-2) + (n^2-5)(5n+2) =$
8. $(n+1)^3 - (n-5)(-5n+2) =$

Exercice 1.5.10 Développements 3

Développer les expressions suivantes :

1. $(a-3)(2b+c) - (ac+2b)$
2. $(b^2-a)^2 - a(2b^2-a)$
3. $a^2c + (a-b)(b-c)(a+b)$
4. $(3a+2)^2 - (4a+b)(2a-1)$
5. $-3 + a(1 + a(2 + b(-1 + a)))$
6. $(a-b)(a-2c) + (b-c)(a-2)$
7. $c(1-a)(1-b) + b(1-a)(1-c) + b(1-a)(1-c)$
8. $(a-b+2c)^2 - (-a-b-c)^2 + (a+b+c)^2$
9. $c(1-a)(1+a) + b(1-a)(1-c) + b(1-a)(1-c)$

Exercice 1.5.11 Factorisation

Factoriser les polynômes de degré 2 suivants (on pourra d'abord chercher des racines « évidentes ») :

1. $x^2 + 4x - 5$
2. $x^2 + 4x + 5$
3. $3x^2 + 4x - 10$
4. $9x^2 + 4x - 5$
5. $3x^2 + 4x + 5$
6. $-2x^2 + 4x - 2$

Exercice 1.5.12 Factorisation

Factoriser les polynômes de degré 2 suivants (on pourra d'abord chercher des racines « évidentes ») :

1. $x^2 + 6x + 5$
2. $-x^2 + 4x - 3$
3. $5x^2 + 4x - 10$
4. $5x^2 + 4x + 5$
5. $x^2 + 2x + 1$
6. $-2x^2 + 8x - 8$

Exercice 1.5.13 D

Exercice 1.5.14 D

1.6 Calculs avec les quantités conjuguées

Exercice 1.6.15 Quantité conjuguée

Quantités conjuguées Utiliser la quantité conjuguée pour calculer et simplifier les expressions suivantes, à l'exemple de :

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2 - 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Faire de même pour :

1. $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} =$
2. $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+3} =$
3. $\sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{3n+1} =$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$
5. pour $n \geq 5$, $\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-3}} =$

Exercice 1.6.16 Quantité conjuguée

Utiliser la quantité conjuguée pour calculer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$
2. $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$
3. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
5. $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

1.7 Calculs sur les fonctions trigonométriques

Exercice 1.7.17 Valeurs usuelles des fonctions trigonométriques

Valeurs remarquables Donner la valeur, quand cela a un sens, de :

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\sin(0)$ | 6. $\cos(0)$ | 11. $\tan(0)$ |
| 2. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | 7. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | 12. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ |
| 3. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 8. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 13. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ |
| 4. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | 9. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | 14. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ |
| 5. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | 10. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | 15. $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |

Exercice 1.7.18 Valeurs usuelles des fonctions trigonométriques

Donner la valeur, quand cela a un sens, de :

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| 1. $\sin(0)$ | 5. $\cos(0)$ | 9. $\tan(0)$ |
| 2. $\sin(\pi)$ | 6. $\cos(\pi)$ | 10. $\tan(\pi)$ |
| 3. $\sin(-\pi)$ | 7. $\cos(-\pi)$ | 11. $\tan(-\pi)$ |
| 4. $\sin(2\pi)$ | 8. $\cos(2\pi)$ | 12. $\tan(2\pi)$ |

Exercice 1.7.19 Relations avec les angles

Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\sin(\pi + x)$ | 5. $\cos(\pi + x)$ | 9. $\tan(\pi + x)$ |
| 2. $\sin(\pi - x)$ | 6. $\cos(\pi - x)$ | 10. $\tan(\pi - x)$ |
| 3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ | 7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ | 11. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ |
| 4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | 8. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | 12. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ |

2 Équations

équations polynomiales

Exercice 2.0.20 Résolution d'équations de degré 1

Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $-3x + 5 = 0$ | 5. $9x + 5 = -7$ | 8. $2(-3x + 5) = 5(2x + 3)$ |
| 2. $3x + 5 = 7$ | 6. $2(3x + 5) = 4x - 2$ | |
| 3. $2x - 5 = -7$ | 7. $2(-3x + 5) = -5(4x - 2)$ | 9. $2(-3x + 5) = -3(2x - 2)$ |
| 4. $6x + 3 = 4$ | | |

Exercice 2.0.21 Résolution d'équations de degré 2

Résoudre les équations suivantes lorsque x est l'inconnue :

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $(3x + 1)^2 = 0$ | 4. $(3x + 5)^2 - (3x + 3)^2 = 0$ |
| 2. $(2x - 2)(3x + 1) = 0$ | |
| 3. $(3x + 5y)^2 - (2x + 5y)^2 = 0$ | 5. $(2x - 2)(3x + 1) = -2$ |

Exercice 2.0.22 Résolution d'équations de degré 2

Résoudre les équations suivantes lorsque x est l'inconnue :

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $(3x + 1)^2 + 4(x^2 + 3x + 7) = 5(x^2 + 4)$ | 4. $(x + 1) - (3x + 3)^2 = 0$ |
| 2. $(2x - 2)^2 + (6x - 3)(3x + 1) = 0$ | |
| 3. $(3x + 5)^2 - (5x + 3)^2 = 0$ | 5. $(x + 2)^2 + (3x + 3)^2 = 0$ |

Exercice 2.0.23 Résolution d'équations algébriques

Résoudre les équations suivantes lorsque x est l'inconnue, on discutera éventuellement selon les valeurs que prend y :

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 1. $xy + 3x + 2y + 5 = 0$ | 3. $(-1 + 2x)^2 = y$ |
| 2. $(-1 + 2x)^3 = y$ | 4. $(3x + 5)^2 - (3x + 5y)^2 = 0$ |

Exercice 2.0.24 Résolution d'équations avec fractions

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{3x - 1}{5} = \frac{1}{2}$ l'inconnue étant x
2. $\frac{5}{3x - 1} = \frac{1}{2}$ l'inconnue étant x
3. $\frac{a + b - 1}{a + 2b} = \frac{1}{2}$ l'inconnue étant a
4. $\frac{a + b - 1}{a + 2b} = \frac{1}{3}$ l'inconnue étant a
5. $\frac{5}{3x - 1} = \frac{x}{2}$ l'inconnue étant x
6. $\frac{5}{3x - 1} = \frac{x}{x + 2}$ l'inconnue étant x

7. $\frac{1}{5x-1} = \frac{2}{2x+3}$ l'inconnue étant x
 8. $\frac{3}{3x-1} = \frac{2}{2x+3}$ l'inconnue étant x

Exercice 2.0.25 Résolution d'équations degré 2

Résoudre les équations suivantes, on pourra chercher des racines « évidentes » :

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 4x - 5 = 0$ | 3. $3x^2 + 4x - 10 = 0$ | 5. $3x^2 + 4x + 5 = 0$ |
| 2. $x^2 + 4x + 5 = 0$ | 4. $9x^2 + 4x - 5 = 0$ | 6. $-2x^2 + 4x - 2 = 0$ |

Exercice 2.0.26 Résolution d'équations degré 2

Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 6x - 7 = 0$ | 3. $3x^2 + 4x - 7 = 0$ | 5. $3x^2 + 4x - 5 = 0$ |
| 2. $x^2 + 6x + 7 = 0$ | 4. $9x^2 + 4x - 5 = 0$ | 6. $-2x^2 + 4x - 5 = 0$ |

Exercice 2.0.27 Résolution d'équations avec valeurs absolues

équations avec valeurs absolues Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|
| 1. $ x + 4 = 7$ | 5. $ 2x - 3 = 1$ | 9. $ (-2x + 5)^2 = 7$ |
| 2. $ 2x + 5 = 7$ | 6. $ 2x - 3 = 0$ | 10. $ (3x + 1)(2x - 5) = 4$ |
| 3. $ x + 4 = -1$ | 7. $ -2x + 5 = 7$ | 11. $ x^2 - 4 = 5$ |
| 4. $ -x + 4 = 1$ | 8. $ -2x - 5 = 7$ | 12. $ x^2 - 5x = 6$ |

Exercice 2.0.28 Résolution d'équations 1

Résoudre les équations suivantes :

- $3|2 - x| + 2|5 - x| = 7$
- $3|2 + x| + 2|-3 + x| = 4$

équations trigonométriques

Exercice 2.0.29 Résolution d'équations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $] - \pi, \pi]$, puis dans $[0, 2\pi[$, les équations suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\sin(x) = 0$ | 3. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 5. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ |
| 2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 4. $\sin(x) = 0$ | 6. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ |

Exercice 2.0.30 Résolution d'équations - écricome 2023

Pour $y \in]0, 1[$ fixé, résoudre l'équation suivante d'inconnue x : $y = \frac{e^x}{(1 + e^x)}$.

Exercice 2.0.31 Résolution d'équations - écricome 2022

Pour $y \in]0, 1[$ fixé, résoudre l'équation suivante d'inconnue x : $y = \exp(-\exp(-x))$.

Exercice 2.0.32 Résolution d'équations - écrivain 2022

Pour tout x réel, on pose $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Trouver les constantes a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{ae^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

3 Inéquations

Exercice 3.0.33 Résolution d'inéquations de degré 1

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------|----------------------------------|
| 1. $-3x + 5 \geq 0$ | 6. $2(3x + 5) > 4x - 2$ |
| 2. $3x + 5 > 7$ | 7. $2(-3x + 5) < -5(4x - 2)$ |
| 3. $2x - 5 < -7$ | 8. $2(-3x + 5) \leq 5(2x + 3)$ |
| 4. $6x + 3 \leq 4$ | 9. $2(-3x + 5) \geq -3(2x - 2)$ |
| 5. $-9x + 5 \geq -7$ | 10. $2(-3x + 5) \geq -4(2x - 2)$ |

Exercice 3.0.34 Résolution d'inéquations de degré 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(3x + 1)^2 \geq 0$ | 4. $(3x + 5)^2 - (2x + 5)^2 \leq 0$ |
| 2. $(3x + 1)^2 > 0$ | 5. $(3x + 5)^2 + (3x + 3)^2 > 0$ |
| 3. $(2x - 2)(3x + 1) \geq 0$ | 6. $(3x + 5)^2 + (3x + 3)^2 \geq 0$ |

Exercice 3.0.35 Résolution d'inéquations de degré 2

Résoudre les équations suivantes lorsque x est l'inconnue :

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $(3x + 1)^2 + 4(x^2 + 3x + 7) \geq 5(x^2 + 4)$ | 4. $(x + 1) - (3x + 3)^2 < 0$ |
| 2. $(2x - 2)^2 + (6x - 3)(3x + 1) \leq 0$ | 5. $(x + 1)^2 + (3x + 3)^2 \leq 0$ |
| 3. $(3x + 5)^2 - (5x + 3)^2 > 0$ | 6. $(x - 1)^2 - (-3x + 3) > 0$ |

Exercice 3.0.36 Résolution d'inéquations algébriques

Résoudre les équations suivantes lorsque x est l'inconnue, on discutera éventuellement selon les valeurs que prend y :

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $xy + 3x + 2y + 5 \geq 0$ | 3. $(-1 + 2x)^2 < y$ |
| 2. $(-1 + 2x)^2 \geq y$ | 4. $(3x + 5)^2 - (3x + 5y)^2 \geq 0$ |

Exercice 3.0.37 Résolution d'inéquations avec fractions

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3x - 1}{5} \geq \frac{1}{2}$ l'inconnue étant x
2. $\frac{5}{3x - 1} \leq \frac{1}{2}$ l'inconnue étant x

3. $\frac{a+b-1}{a+2b} \geq \frac{1}{2}$ l'inconnue étant a
4. $\frac{5}{3x-1} \geq \frac{x}{2}$ l'inconnue étant x
5. $\frac{5}{3x-1} \geq \frac{x}{x+2}$ l'inconnue étant x
6. $\frac{1}{5x-1} \leq \frac{2}{2x+3}$ l'inconnue étant x
7. $\frac{3}{3x-1} > \frac{2}{2x+3}$ l'inconnue étant x

Exercice 3.0.38 Résolution d'inéquations degré 2

Résoudre les inéquations suivantes, on pourra chercher des racines « évidentes » :

1. $x^2 + 4x - 5 \geq 0$
2. $x^2 + 4x + 5 \leq 0$
3. $3x^2 + 4x - 10 < 0$
4. $9x^2 + 4x - 5 > 0$
5. $3x^2 + 4x + 5 \leq 0$
6. $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

Exercice 3.0.39 Résolution d'inéquations degré 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 6x - 7 \geq 0$
2. $x^2 + 6x + 7 \geq 0$
3. $x^2 + 6x + 7 > 0$
4. $3x^2 + 4x - 7 \geq 0$
5. $9x^2 + 4x - 5 \geq 0$
6. $9x^2 + 4x - 5 < 0$
7. $3x^2 + 4x - 5 \geq 0$
8. $-2x^2 + 4x - 5 \geq 0$
9. $-2x^2 + 4x - 5 < 0$

Exercice 3.0.40 Résolution d'inéquations

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x+2)^2 \leq (4x+3)^2$
2. $(3x+2)^2 < -(4x+3)^2$
3. $(3x+2)^2 < (2x+3)^2$
4. $x^2 + 5x > 0$
5. $x^3 - 5x^2 < 0$
6. $x^3 + 5x \geq 0$

Exercice 3.0.41 Résolution d'inéquations avec valeurs absolues

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x-3| \leq 4$
2. $|x+4| < 7$
3. $|2x-3| \leq 1$
4. $|-2x+5| > 7$
5. $|(3x+1)(2x-5)| > 2$
6. $|(3x-1)(-2x+5)| < 2$

Exercice 3.0.42 Résolution d'inéquations

Résoudre les équations suivantes :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

4 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 4.0.43 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Résoudre le système d'équations suivant dont les inconnues sont x et y :

1. $\begin{cases} -3x + 5y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 6x - 12y = -6 \end{cases}$

Exercice 4.0.44 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Résoudre le système d'équations suivant dont les inconnues sont x et y :

1. $\begin{cases} 2x + 3y = a \\ 3x + 5y = b \end{cases}$ discuter selon les valeurs de a et b .
2. $\begin{cases} 3x - 6y = a \\ 2x + 5y = b \end{cases}$ discuter selon les valeurs de a et b .
3. $\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ discuter selon les valeurs de a .
4. $\begin{cases} 2x + by = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ discuter selon les valeurs de b .
5. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ discuter selon les valeurs de a et b .
6. $\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + by = 2 \end{cases}$ discuter selon les valeurs de a et b .
7. $\begin{cases} (3-\lambda)x - 6y = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$ discuter selon les valeurs de λ

Exercice 4.0.45 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Résoudre le système d'équations suivant dont les inconnues sont x et y :

1. $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 6 \\ -2x + 5y - 3z = 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \\ -2x + 5y - 3z = 4 \end{cases}$

5 Conjecture

Exercice 5.0.46 conjecture sur les suites

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2$ et $u_0 \in]0, 1[$.
Conjecturer la monotonie de (u_n) .

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = v_n^2$ et $v_0 > 1$.
Conjecturer la monotonie de (v_n) .
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = w_n^2$ et $w_0 \in]-1, 0[$.
Conjecturer la monotonie de (w_n) .
4. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x_n$.
Conjecturer l'expression du terme général de (x_n) .

Exercice 5.0.47 conjecture sur les suites

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $(u_0, u_1) \in]0, +\infty[^2$.
Conjecturer la monotonie de (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 1}$ et $v_0 > 1$.
Conjecturer la monotonie de (v_n) .
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = 3w_n^2 - 2$ et $w_0 = -1$.
Conjecturer le comportement de la suite (w_n) .

Exercice 5.0.48 conjecture sur les fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Conjecturer la parité de f .
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Conjecturer les variations de f sur $] -\infty, 0]$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Pourquoi f ne peut-elle pas être impaire ?
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + e^{-|x|}$.
Pourquoi f ne peut-elle pas être paire ?

Exercice 5.0.49 conjecture sur les suites

- 1.
- 2.

Exercice 5.0.50 conjecture sur les suites

- 1.
- 2.

Exercice 5.0.51 conjecture sur les suites

- 1.
- 2.

Exercice 5.0.52 conjecture sur les suites

- 1.

2.

Exercice 5.0.53 conjecture sur les suites

1.

2.

6 Logique

Exercice 6.0.54 Résultats incohérents

Entre les résultats suivants, le ou lesquels sont aberrants ?

1. Quelle affirmation est aberrante :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \quad \text{ou}$$
$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} ?$$

2. Quelle affirmation est aberrante :

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = A^2 + 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = -A^2 - 1 ?$$

3. Quelle affirmation est aberrante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = 2 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = 1 ?$$

4. Si (u_n) est une suite réelle, quelle affirmation est aberrante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = n + 2 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 ?$$

5. Si $x > 0$, quelle affirmation est aberrante :

$$\ln(x) \geq 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) > 0 ?$$

6. Si $x \in \mathbb{R}$, quelle affirmation est aberrante :

$$-x^2 = e^x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x^2 + 1} = e^x ?$$

7. Si (u_n) est une suite réelle croissante, quelle affirmation est aberrante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = n + 3 ?$$

8. Si $x \geq 0$, quelle affirmation est aberrante :

$$x^2 \geq x \quad \text{ou} \quad x^2 \leq x \quad \text{ou} \quad x^2 > x ?$$

9. Quelle affirmation est aberrante :

« La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ » ou « La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ » ?

10. Si (u_n) est une suite réelle décroissante, quelle affirmation est aberrante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = n + 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty ?$$

Exercice 6.0.55 Syllogismes

Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, et on suppose qu'il existe au moins un martien et au moins un jupitérien.

Quelle affirmation est vraie, ou quelles affirmations sont vraies ?

1. Les martiens sont verts. Ceux qui ont trois oreilles sont verts. Donc :
 - A) les martiens ont trois oreilles.
 - B) ceux qui ont trois oreilles sont des martiens.
 - C) ceux qui sont verts sont des martiens.
 - D) on ne peut rien conclure.
2. Les triangles équilatéraux sont isocèles. Les triangles isocèles ont deux angles égaux. Donc :
 - A) les triangles isocèles sont équilatéraux.
 - B) les triangles équilatéraux ont deux angles égaux.
 - C) les triangles qui ont deux angles égaux sont équilatéraux.
 - D) on ne peut rien conclure.
3. Si Jean rate le bus pour le lycée, il arrivera en retard au stage de pré-rentree. Jean est arrivé en retard. Donc :
 - A) Jean a raté le bus.
 - B) Jean est exclu du stage.
 - C) Jean arrivera en retard demain.
 - D) on ne peut rien conclure.
4. Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I . La fonction f est continue sur l'intervalle I . Donc :
 - A) f est dérivable sur I .
 - B) f est dérivable sur une partie de I .
 - C) f n'est pas dérivable sur I
 - D) on ne peut rien conclure.
5. Les martiens sont verts. Les êtres vivants qui sont verts ont trois oreilles. Donc :
 - A) les martiens ont trois oreilles.
 - B) ceux qui ont trois oreilles sont des martiens.
 - C) ceux qui sont verts sont des martiens.
 - D) on ne peut rien conclure.
6. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles. Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Les êtres vivants qui ont trois oreilles sont verts. Donc :
 - A) les extraterrestres sont des martiens et sont verts.
 - B) les martiens ont trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) on ne peut rien conclure.
7. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles. Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Les êtres vivants qui sont verts et ont trois oreilles sont martiens. Donc :
 - A) les extraterrestres sont des martiens et sont verts.
 - B) les martiens ont trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) on ne peut rien conclure.
8. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles. Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Les êtres vivants qui sont verts ou ont trois oreilles sont martiens. Donc :
 - A) les extraterrestres sont des martiens et sont verts.

- B) les martiens ont trois oreilles.
- C) les jupytériens ont deux oreilles.
- D) on ne peut rien conclure.

Exercice 6.0.56 Syllogismes

Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, et on suppose qu'il existe au moins un martien et au moins un jupytérien.

Quelle affirmation est vraie, ou quelles affirmations sont vraies ?

1. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles.
Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Aucun martien n'a trois oreilles.
Donc :
 - A) les extraterrestres sont des martiens et sont verts.
 - B) les martiens ont trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) les martiens ont deux oreilles.
2. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles.
Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Certains martiens ont trois oreilles. Donc :
 - A) les martiens ont deux oreilles.
 - B) les martiens ont trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) autre réponse.
3. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles.
Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Certains martiens ont trois oreilles. Donc :
 - A) il existe des hommes verts à trois oreilles.
 - B) il existe des hommes bleus à trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) un extraterrestre à trois oreilles est martien.
 - E) on ne peut rien conclure.
4. Un extraterrestre est soit martien soit jupitérien, il possède 2 ou 3 oreilles.
Les martiens sont verts. Les jupytériens sont bleus. Certains martiens ont trois oreilles. Un extraterrestre qui a trois oreilles n'est pas bleu. Donc :
 - A) il existe des hommes verts à trois oreilles.
 - B) il existe des hommes bleus à trois oreilles.
 - C) les jupytériens ont deux oreilles.
 - D) un extraterrestre à trois oreilles est martien.
 - E) on ne peut rien conclure.

Exercice 6.0.57 Négation

Quelle est la négation de :

1. « tous les lapins mangent des carottes »
2. « tous les étudiant sont des garçons »
3. « il existe un lapin qui mange des carottes »
4. « tous les lapins mangent des carottes et tous les étudiant sont des garçons »

5. « tous les triangles isocèles sont équilatéraux »
6. « toutes les fonctions continues sont dérivables »
7. « il existe une matrice inversible qui est diagonalisable. »

Exercice 6.0.58 Réciproque et Contraposée

Dire si l'implication proposée est vraie ou fausse. Citer la contraposée des implications. Citer la réciproque des implications, et dire si la réciproque est vraie.

1. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante alors elle tend vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante alors elle est majorée.
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée alors elle est monotone.
5. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.0.59 Négation

Quelle est la négation de :

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.
3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone.
5. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

7 Sommes et produits

7.1 Sommes usuelles

Exercice 7.1.60

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et donner leur valeur

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + 28$.
2. $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$.
3. $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 101$.
4. $1 + 4 + 9 + \cdots + (n+1)^2$.
5. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{2048}$.
6. $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$.
7. $1 + 9 + 81 + \cdots + 3^{2n}$.
8. $\frac{n}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-2}{n^2} + \cdots + \frac{2}{n^2}$.

Exercice 7.1.61

Écrire les sommes suivantes en extension (*i.e.* avec des $+$, et si besoin des points de suspensions), et donner leur valeur, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$1. \sum_{k=0}^9 3.$$

$$2. \sum_{j=1}^9 (n-3).$$

$$3. \sum_{\ell=0}^n (-1).$$

$$4. \sum_{k=1}^{100} (-1)^k.$$

$$5. \sum_{j=1}^{10} (\sqrt{j+1} - \sqrt{j}).$$

$$6. \sum_{k=-5}^7 k.$$

Exercice 7.1.62

Calculer les sommes suivantes, pour $n, m \in \mathbb{N}$.

$$1. \sum_{k=1}^{12} 3$$

$$2. \sum_{\ell=0}^5 5.$$

$$3. \sum_{j=1}^n (1+n).$$

$$4. \sum_{i=0}^{n+1} (n-1).$$

$$5. \sum_{k=1}^{30} k.$$

$$6. \sum_{i=0}^{29} i.$$

$$7. \sum_{n=0}^m (n+1).$$

$$8. \sum_{k=0}^{n+2} k.$$

$$9. \sum_{k=2}^n (3k-m).$$

$$10. \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j-2}{3}.$$

Exercice 7.1.63

Calculer les sommes suivantes, pour $n, m \in \mathbb{N}$.

$$1. \sum_{\ell=3}^9 9\ell^2.$$

$$2. \sum_{k=1}^n k(k-1).$$

$$3. \sum_{j=1}^{11} (-2)^j.$$

$$4. \sum_{k=2}^{n-1} 3^k.$$

$$5. \sum_{j=0}^n (-2)^{2j}.$$

$$6. \sum_{k=0}^n (-2)^{3k}.$$

$$7. \sum_{i=1}^n ((-3)^i + 2i).$$

$$8. \sum_{j=2}^{n+1} \frac{-3}{2^j}.$$

$$9. \sum_{k=1}^n 3^{n-k}.$$

$$10. \sum_{i=0}^n 2i(1-i^2).$$

$$11. \sum_{k=0}^n 3^k 5^{n-k}.$$

$$12. \sum_{j=2}^{2n} \frac{3^{j+1}}{4^j} 2^{3j}.$$

Exercice 7.1.64

Télescopage et changement d'indice

Calculer les sommes suivantes. On pourra utiliser le changement d'indice suggéré. On se rappellera que $0 = 1 - 1$.

1. $\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right).$
2. $\sum_{i=2}^{100} (i+3) - \sum_{k=5}^{99} (k+2).$
3. $\sum_{j=1}^{1000} \frac{1}{j(j+1)}.$
4. $\sum_{j=3}^{100} \frac{1}{\sqrt{j+1} + \sqrt{j}}.$
5. $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$
6. $\sum_{j=1}^n \frac{j}{(j+1)!}$
7. $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ (poser $j = k - 2$)
8. $\sum_{j=1}^n j2^j$ (poser $k = j - 1$)

7.2 Produits

Exercice 7.2.65 Symbole produit

Écrire avec le symbole $\prod$ les produits suivants, et donner leur valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 7.$
2. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$
3. $3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n.$
4. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7}.$
5. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 20.$
6. $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$
7. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 21.$

Exercice 7.2.66 Produits divers

Calculer ou exprimer simplement les produits suivants, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\prod_{k=0}^8 2$
2. $\prod_{j=1}^{12} (-1)$
3. $\prod_{i=3}^6 i$
4. $\prod_{k=0}^{15} k^2$
5. $\prod_{j=1}^{10} j$
6. $\prod_{k=1}^n (2k)$
7. $\prod_{j=3}^{12} 5^j$
8. $\prod_{j=0}^n x^3$, pour $x \in \mathbb{R}$
9. $\prod_{k=1}^n \frac{2}{k}$
10. $\prod_{k=1^n} k^2$
11. $\prod_{k=2}^n \sqrt{1 - \frac{1}{k}}$

7.3 Binôme de Newton

Coefficient binomial

Exercice 7.3.67 Coefficient binomial - bases

1. Donner, sans le moindre calcul, la valeur des expressions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\binom{3}{2}, \binom{6}{1}, \binom{9}{9}, \binom{n+1}{n}, \binom{n-1}{n+1}, \binom{n-1}{1}, \binom{n^2}{(n-1)(n+1)}, \binom{n^3}{0}.$$

2. Donner la valeur des expressions suivantes :

$$\frac{8!}{6!}, \quad \frac{10!}{2!8!}, \quad \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}, \quad \frac{99!}{101!}.$$

3. a) Calculer la valeur des expressions suivantes :

$$\binom{5}{2}, \binom{6}{4}, \binom{7}{5}, \binom{7}{3}, \binom{8}{6}, \binom{10}{2}, \binom{15}{13}$$

- b) Retrouver les valeurs des quatre premières en écrivant le triangle de Pascal jusqu'à la huitième ligne.

Exercice 7.3.68 Coefficient binomial

1. Simplifier les expressions suivantes, où $0 < k < n$.

$$\binom{n}{2}, \binom{n+1}{3}, \binom{n+2}{n-1}, \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

2. Rappeler la formule du triangle de Pascal et la petite formule.
3. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les formules rappelées ci-dessus.

$$\binom{11}{8} + \binom{11}{9}, \quad \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k}, \quad \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} - \frac{1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Exercice 7.3.69 Binôme de Newton

Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$ (on pourra être amené à différencier selon les valeurs de n . On prendra aux bornes inférieures et supérieures de chaque somme.)

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

2. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k$

3. $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k+1}$

4. $\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 2^{2j}$

5. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^{2k}}{3^{n-k}}$

6. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}}$

7. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

8. $\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$

7.4 Sommes doubles

Exercice 7.4.70 Sommes doubles 1

Calculer les sommes suivantes, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1.$
2. $\sum_{0 \leq k, \ell \leq n} k.$
3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij.$
4. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i + j).$
5. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$
6. $\sum_{0 \leq k, \ell \leq n} kx^\ell, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$
7. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j).$

Exercice 7.4.71 Sommes doubles 2

Pour chacune des sommes suivantes, l'écrire comme une somme double de deux manières différentes, puis la calculer, pour $n \geq 2$.

1. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 1.$
2. $\sum_{0 < k < \ell < n} 2.$
3. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} j.$
4. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij.$
5. $\sum_{0 \leq i < j \leq n} x^{i+j}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}$
6. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}.$

8 Suites

8.1 Monotonie

Exercice 8.1.72

Pour chacune des suites suivantes dont on donne le terme général, déterminer sa monotonie (éventuellement monotonie à partir d'un certain rang, que l'on précisera).

1. $u_n = n.$
2. $v_n = \frac{3^n}{2^{2n}}.$
3. $x_k = k^2 + k.$
4. $u_n = n^2 - n.$
5. $v_n = 1 - \frac{3}{7^n}.$
6. $a_n = \frac{n}{3^n}.$
7. $u_n = \frac{n}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$
8. $v_n = \frac{3n+1}{3+2n}.$

Exercice 8.1.73

Pour chacune des suites suivantes, déterminer sa monotonie.

1. $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.
2. $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. $w_n = \sum_{k=n}^{2n} k$.
4. $u_0 = 1$, et : $u_{n+1} = e^{u_n}$.
5. $u_0 = 0$, et : $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
6. $u_0 = 1$, et : $u_{n+1} = n\sqrt{u_n}$.
7. $u_0 = -1$, et : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

8.2 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

Exercice 8.2.74

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général, puis exprimer la somme des 1492 premiers termes.

1. $u_0 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n$.
2. $u_0 = 5$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$.
3. $x_1 = 3$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+2} = \frac{x_n}{2}$.
4. $v_4 = -12$, et : $\forall n \geq 4, v_{n+1} + 3 = v_n$.
5. $u_2 = 1$, et : $\forall n \geq 2, 2u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 8.2.75

Pour chacune des suites suivantes dont on donne le terme général, montrer qu'elle est arithmétique ou géométrique, et déterminer la raison et le premier terme.

1. $u_n = 1$
2. $v_n = n$
3. $v_n = -2n + 1$
4. $u_n = (-1)^{n+1}$.
5. $v_n = 5 - \frac{n}{2}$.
6. $u_n = 4 \cdot 3^{2n}$
7. $v_n = \frac{4}{3^{\frac{n}{2}}}$
8. $u_n = \frac{5 - 3n}{8}$.

Exercice 8.2.76

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général, puis exprimer la somme des 1789 premiers termes.

1. $u_0 = 4$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$.
2. $u_3 = 2$, et : $\forall n \geq 3, u_{n+1} = 1 - 3u_n$.
3. $u_0 = -2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 3u_n = 1$.
4. $v_0 = -1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} + v_n = 2v_n - 4$.
5. $u_1 = \frac{1}{2}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n - 2(1 - u_n)$.
6. $u_0 = \frac{1}{3}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = pu_n + (1 - p)(1 - u_n)$, pour $p \in]0, 1[$.

8.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 8.3.77

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général, et déterminer la limite éventuelle lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. $u_0 = u_1 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 15u_n$.
3. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, et : $\forall n \geq 2$, $x_{n+1} + 2x_n + x_{n-1} = 0$.
4. $v_0 = 2$, $v_1 = 4$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 8v_{n+1} - 16v_n$.
5. $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, et : $\forall n \geq 2$, $a_n - 2a_{n-2} = -a_{n-1}$.

8.4 Déterminer le terme général

Exercice 8.4.78

Pour chacune des suites suivantes définie par une relation de récurrence, donner une expression (la plus simple possible) du terme général.

1. $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.
2. $v_1 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (n+2)v_n$.
3. $w_0 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = -3nw_{n-1}$.
4. $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 u_{n-1}$.
5. $v_0 = 3$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3(n+1)}v_n$.

Exercice 8.4.79

Même exercice.

1. $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$.
2. $v_0 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n - n - 1$.
3. $w_1 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = w_n + (-1)^n$.
4. $u_0 = 3$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2^n$.
5. $v_0 = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
6. $w_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - 3^n$.
7. $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.

8.5 Calcul de limites

Exercice 8.5.80

Déterminer les limites des suites dont on donne le terme général.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\frac{n^2 + 2}{3n^3 + 2n^2 - n}$ | 5. $\frac{n - \ln(n^6)}{(\ln(n))^8 + 2n}$ |
| 2. $\frac{2 + 3n^4}{(n^2 + 5)^2}$ | 6. $\frac{5^n - n^2}{(-7)^n}$ |
| 3. $\frac{2^n - n^2}{n^4 + n^2}$ | 7. $\frac{5^n - n^2}{-2^n + (-1)^n}$ |
| 4. $\frac{\ln(n^5)}{\ln(6n^7)}$ | 8. $\frac{(-1)^n + 2n - (\frac{1}{2})^n}{n^2}$ |

Exercice 8.5.81

Même exercice.

1. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
2. $\sqrt{2n+3} - \sqrt{6n}$
3. $\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$
4. $\sqrt{n^2+2n+3} - (n+1)$
5. $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

6. $\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{-1}{k^2}\right)$
7. $\sum_{k=0}^n e^{\sin(2^{-k})}$
8. $\arctan(n^2) - \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right).$

9 Analyse réelle

9.1 Graphes de fonctions

Rappels sur les fonctions usuelles On rappelle ci-dessous (fig. 1,2,3) le graphe de certaines des fonctions usuelles, graphes qui sont à connaître et savoir reproduire. Pour chacune de ces fonctions, posez-vous ces quelques questions.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction ?
2. Est-elle continue sur son domaine de définition ? Est-elle dérivable, et sur quel domaine ?
3. Quelles sont les valeurs remarquables de cette fonction ?

Déterminer toutes les symétries présentes dans ces graphs : symétries au sein d'une même courbe, entre deux courbes ou portions de courbes distinctes, symétries centrales, axiales, etc. Par exemple, quelle(s) relation(s) voyez-vous entre la courbe 1a et la courbe 1b ?

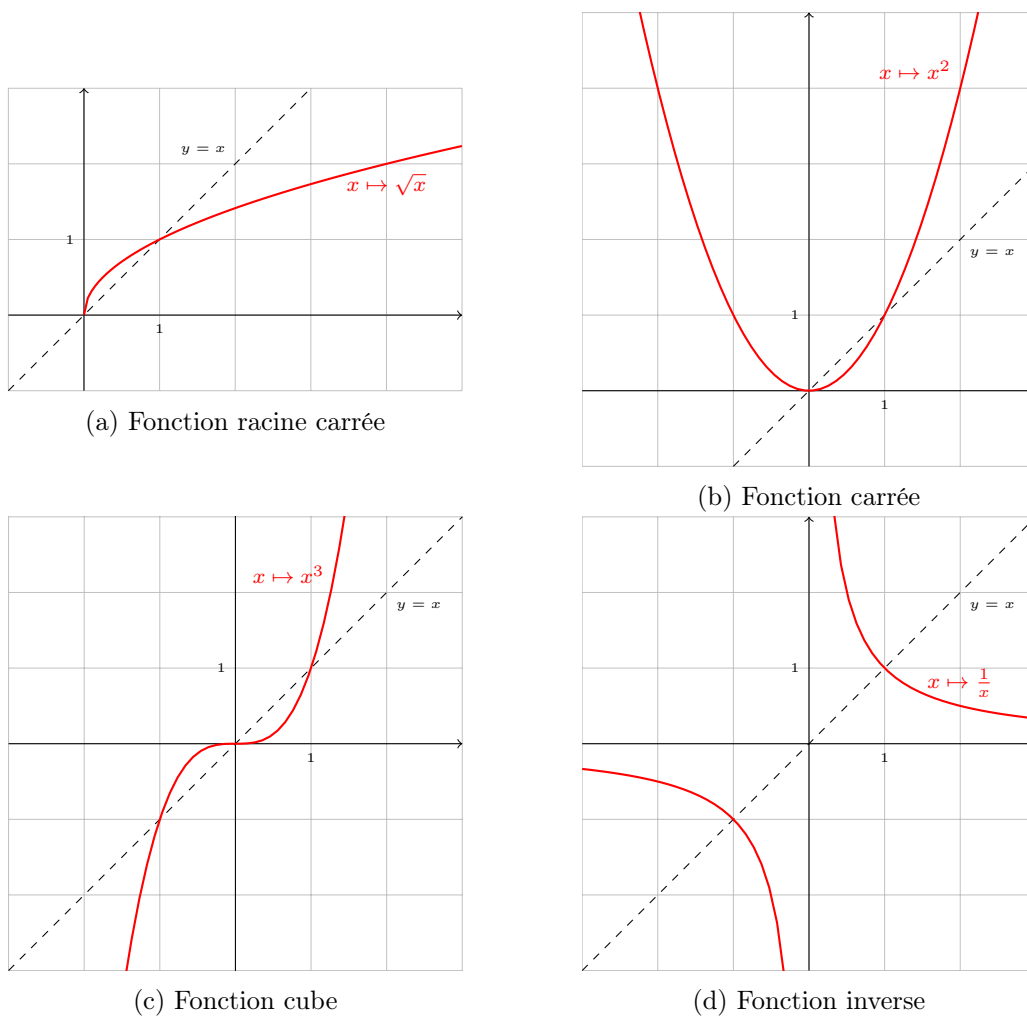
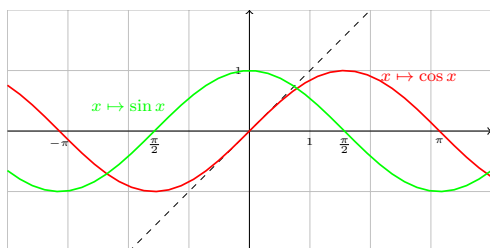
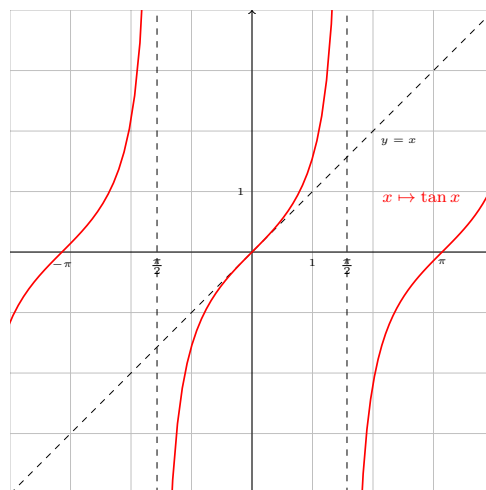


FIGURE 1 – Quelques fonctions puissance

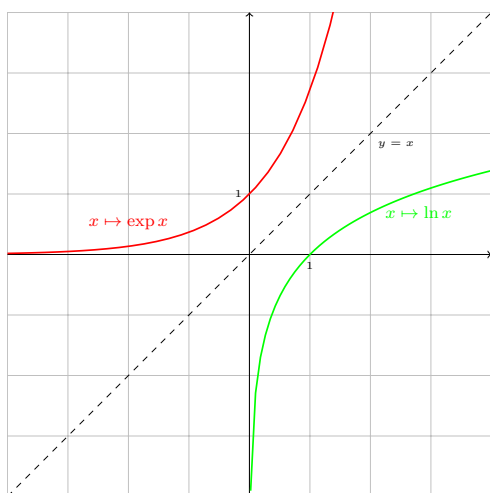


(a) Fonctions sinus et cosinus

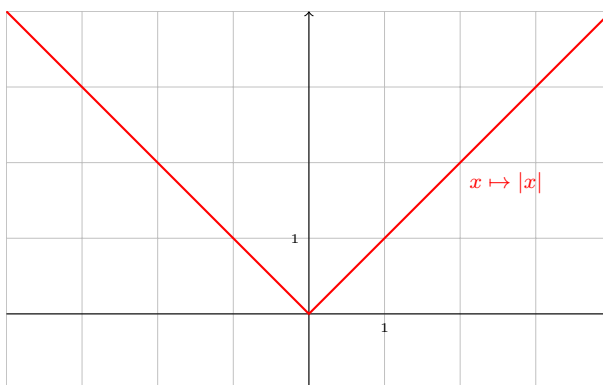


(b) Fonction tangente

FIGURE 2 – Quelques fonctions trigonométriques



(a) Fonctions exponentielle et logarithme (népérien)



(b) Fonction valeur absolue

FIGURE 3 – Et quelques autres fonctions fondamentales

Exercice 9.1.82 Translations et symétries

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition et esquisser son graphe en vous ramenant, par symétrie et translation, au graphe d'une fonction usuelle.

1. $t \mapsto 2 - t$

2. $x \mapsto 3(x - 1) + 2$

3. $x \mapsto e^{-x}$

4. $t \mapsto e^{1+t}$

5. $y \mapsto \ln(1 + y)$

6. $x \mapsto 1 - x^3$.

7. $t \mapsto \sqrt{t - 3}$

8. $u \mapsto 2 - \sqrt{u}$

9. $x \mapsto 3 - e^{2-x}$

10. $x \mapsto x^2 + 2x + 1$

11. $t \mapsto t^2 - 2t - 1$

12. $x \mapsto 2 - \frac{1}{x+1}$

9.2 Inégalités

9.3 Calcul de limites

9.4 Continuité

9.5 Dérivation

Exercice 9.5.83 Calculs de dérivées - fonctions polynomiales

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une expression de sa fonction dérivée.

1. $x \mapsto x + 3$
2. $x \mapsto 1 - 3x$
3. $t \mapsto 2 - t^2$
4. $x \mapsto x^2 - 5x$
5. $x \mapsto 1 - 2x + 4x^2 - x^3$
6. $t \mapsto \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}$
7. $t \mapsto (3 + t^2)^3$ (sans développer)
8. $x \mapsto (x^2 - 1)^5$
9. $t \mapsto (3t^3 - 5)^{12}$
10. $x \mapsto (2 + (-x^4))^{13}$

Exercice 9.5.84 Calculs de dérivées - fonctions polynomiales 2

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une expression de sa fonction dérivée.
($n \in \mathbb{N}^*$.)

1. $x \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} x^j$
2. $x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$
3. $x \mapsto \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$
4. $x \mapsto \sum_{j=0}^n \frac{(1-t)^j}{j!}$
5. $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
6. $x \mapsto \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$

Exercice 9.5.85 Calculs de dérivées - fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, les intervalles sur lesquels elle est dérivable, et une expression de sa fonction dérivée.

1. $x \mapsto e^{3x}$
2. $t \mapsto \ln(-t)$
3. $x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
4. $x \mapsto \sqrt{x+3}$
5. $x \mapsto \frac{1}{1-3x}$
6. $t \mapsto \ln(3t+1)$
7. $x \mapsto \cos\left(3x + \frac{5\pi}{2}\right)$
8. $t \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
9. $u \mapsto \arctan(3u)$

Exercice 9.5.86 Calculs de dérivées - produits et quotients

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, les intervalles sur lesquels elle est dérivable, et une expression de sa fonction dérivée.

1. $x \mapsto xe^x$
2. $t \mapsto t^2 \sin t$
3. $x \mapsto x \ln x - x$
4. $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ (rappel : 0=1-1)
5. $x \mapsto \cos(2x)e^{-x}$
6. $x \mapsto (3x^2 + 1)\sqrt{2x-4}$

Exercice 9.5.87 Calculs de dérivées - fonctions composées

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, les intervalles sur lesquels elle est dérivable, et une expression de sa fonction dérivée.

1. $x \mapsto \sqrt{e^x + 3}$
2. $x \mapsto \frac{1}{3 - \cos x}$
3. $t \mapsto \ln(1 - t^2)$
4. $x \mapsto \cos(x^3)$
5. $t \mapsto \sin^3 t$
6. $x \mapsto e^{\cos(3x)}$
7. $x \mapsto \ln(\sin(2x))$
8. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$
9. $x \mapsto e^{-e^{-x}}$
10. $t \mapsto \ln \left(\left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right)$

Exercice 9.5.88 Calcul de dérivées - paramètres

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, les intervalles sur lesquels elle est dérivable, et une expression de sa fonction dérivée, en fonction des paramètres proposés. Ici, $\alpha, \sigma, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. $x \mapsto e^{-\lambda x}$
2. $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$
3. $x \mapsto (1 - x)^n e^{-2x}$
4. $t \mapsto \cos^n(t)$
5. $x \mapsto \arctan \left(\frac{x}{\alpha} \right)$
6. $t \mapsto \frac{1}{(1 - t)^n}$
7. $t \mapsto \ln(1 + t^n)$

Exercice 9.5.89 Dérivées multiples

1.
 - a) Donner la dérivée quatrième de $x \mapsto x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8$.
 - b) Donner la dérivée sixième de $x \mapsto \sin(\pi x)$.
 - c) Donner la dérivée troisième de $t \mapsto \ln(1 + t)$.
2. Pour chacune des fonctions suivantes, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra être amené à différencier selon certaines valeurs de n , ou selon la parité de n . On pourra être amené à utiliser la formule de Leibniz.
 - a) $x \mapsto e^{-3x}$.
 - b) $x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$.
 - c) $x \mapsto x^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
 - d) $t \mapsto \cos(2t)$.
 - e) $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
 - f) $t \mapsto (t^2 - 1) \sin(\pi t)$.
 - g) $t \mapsto \frac{1}{1 - t}$.

9.6 Primitives et intégrales

Calcul de primitives

Exercice 9.6.90 Primitives usuelles

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive simple. On précisera les intervalles de définition.

1. $x \mapsto x^3 - 4x + 2$
2. $x \mapsto 5 - \pi$
3. $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{3}\right)$
4. $x \mapsto e^{-2x}$
5. $t \mapsto \frac{1}{1-t}$
6. $x \mapsto (1-2x)^6$ (ne pas développer)
7. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
8. $t \mapsto \sqrt{1+t}$
9. $x \mapsto \frac{1}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
10. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
11. $x \mapsto \frac{2x}{1+x}$
12. $t \mapsto \frac{2}{1+t^2}$
13. $t \mapsto \frac{3t^2}{1+t^2}$

Exercice 9.6.91 Primitives et composées

Pour chacune des fonctions suivantes, reconnaître la dérivée d'une fonction composée et donner une primitive.

1. $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$
2. $x \mapsto x \cos(x^2)$
3. $t \mapsto \tan t$
4. $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$
5. $x \mapsto 2 \sin(x) \cos(x)$
6. $t \mapsto 2t(1+t^2)^6$
7. $x \mapsto \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$
8. $t \mapsto 4 \cos(t) \sin^3(t)$

Exercice 9.6.92 Calcul d'intégrales - primitivation 1

Calcul d'intégrales Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^4 3 \, dt$
2. $\int_2^5 (2-x) \, dx$
3. $\int_{-1}^2 t^2 - 3t + 1 \, dt$
4. $\int_{-1}^2 (1-x)^3 dx$
5. $\int_0^2 e^{-3x} dx$
6. $\int_0^2 \frac{2}{1+t} - 3t \, dt$
7. $\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$ (0=1-1)
8. $\int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt$

Exercice 9.6.93 Calcul d'intégrales - primitivation 2

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\ln(2)} u e^{-u^2} du$
2. $\int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+2t+2} dt$
3. $\int_0^2 3t(1-t^2)^5 dt$
4. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x^3} dx$
5. $\int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$
7. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$

Exercice 9.6.94 Calcul d'intégrales - primitives et trigonométrie

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t) dt$
2. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt.$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2(t) dt$
5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x) dx$
6. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2} dx$
7. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3}{2+x^2} dx$
8. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$

Exercice 9.6.95 Calcul d'intégrales - intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x e^x dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cos(2u) du$
3. $\int_0^2 x^2 e^{-3x} dx$
4. $\int_1^x t \ln(t) dt \quad (x \geq 1)$
5. $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(t) dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) e^{-t} dt$

Exercice 9.6.96 Calcul d'intégrales - changement de variable non trivial

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad (\text{poser } u = e^x)$
2. $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \quad (\text{poser } u = e^t)$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) \sin^8(x) dx \quad (\text{poser } u = \sin x)$
4. $\int_0^1 e^{-(x+e^{-x})} dx \quad (\text{poser } u = e^{-x})$
5. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \quad (\text{poser } t = \cos \theta)$

Exercice 9.6.97 Calcul d'intégrales - paramètres

Calculer les intégrales suivantes, en fonction du paramètre proposé. On pourra être amené à faire des disjonctions de cas.

1. $\int_0^1 e^{-\lambda t} dt$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\int_0^1 (1-x)^n dx$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n\theta) d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}$.
4. $\int_n^{2n} \sin(n\pi\theta) d\theta$.
5. $\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$, pour $\sigma > 0$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (poser $u = \sin \theta$)

Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 9.6.98

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, justifier qu'elle est de classe C^1 sur chaque intervalle du domaine, et donner une expression de la fonction dérivée (on pourra ensuite étudier la monotonie, un prolongement continu éventuel aux bords, voir un prolongement C^1)

1. $F : x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt.$

2. $G : x \mapsto \int_{-2x}^x e^{-t^2} dt.$

3. $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \ln(1 - t^2) dt.$

4. $G : x \mapsto \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{1+t}.$

5. $F : x \mapsto \int_1^{\cos x} e^t \ln(1+t) dt.$

10 Probabilités

Formule de transfert

11 Algèbre

11.1 Polynômes

11.2 Polynômes de degré 2

Exercice 11.2.99 Racines évidentes et factorisation

Trouver les racines évidentes x des équations suivantes, puis factoriser ces polynômes :

1. $x^2 - 6x + 5$

4. $x^2 + 3x$

7. $x^2 - 5x$

2. $x^2 - 4x - 5$

5. $x^2 - 6x + 8$

8. $x^2 - 4$

3. $x^2 - 3x - 10$

6. $x^2 - x - 20$

9. $x^2 - 7x + 10$

Exercice 11.2.100 Polynômes de degré 2

Trouver une racine évidente x des équations suivantes, et donner l'autre racine :

1. $2x^2 + 9x + 10$

4. $-3x^2 + 13x - 4$

7. $-4x^2 - 18x - 8$

2. $-x^2 - 4x + 5$

5. $5x^2 - 22x + 8$

8. $-4x^2 - 18x + 10$

3. $-x^2 - 5x - 4$

6. $-4x^2 - 3x + 10$

9. $4x^2 + x$

Exercice 11.2.101 Racines évidentes

Trouver une racine évidente x des équations suivantes, et donner l'autre racine :

1. $x^2 + (-a - b)x + ab$

3. $2x^2 - 5xb + 3b^2$

2. $2x^2 + (-3b - 2a)x + 3ab$

4. $5x^2 - 8xa + 3a^2$

Exercice 11.2.102 Racines évidentes et factorisation

Trouver les racines évidentes x des équations suivantes, puis factoriser ces polynômes :

- | | | |
|----------------------|-----------------------|---------------------|
| 1. $5x^2 + 16x - 16$ | 4. $-2x^2 + 5x + 3$ | 7. $-2x^2 - 7x + 4$ |
| 2. $2x^2 - 5x$ | 5. $-4x^2 - 16x - 12$ | 8. $-3x^2 - 5x + 2$ |
| 3. $5x^2 - 8x - 4$ | 6. $-5x^2 - 28x - 15$ | 9. $-6x^2 - x + 2$ |

Exercice 11.2.103 somme et produit des racines

Quelle est la somme et quel est le produit des racines des polynômes suivants :

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x^2 + 3x + 5$ | 4. $4x^2 - 3x + 5$ | 7. $-4x^2 - 3x + 5$ |
| 2. $x^2 - 3x + 6$ | 5. $-2x^2 + 3x + 5$ | 8. $-3x^2 - 3x - 5$ |
| 3. $4x^2 + 3x + 8$ | 6. $-2x^2 + 3x - 5$ | 9. $x^2 - 7x + 8$ |

Exercice 11.2.104 Système d'équations somme et produit

Résoudre les systèmes suivants :

- | | |
|--|--|
| 1. $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -18 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -18 \end{cases}$ |

Exercice 11.2.105 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.2.106 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.2.107 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.2.108 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.2.109 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.2.110 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

11.3 Polynômes

Exercice 11.3.111 Racines évidentes

racines évidentes Trouver toutes les racines (évidentes) des polynômes suivants :

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1. $x^2 + 6x + 5$ | 4. $x^2 - 3x - 4$ | 7. $x^2 + 7x + 10$ |
| 2. $x^2 - 3x - 4$ | 5. $x^2 + 3x$ | 8. $x^2 + 2x - 8$ |
| 3. $x^2 + 2x + 1$ | 6. $x^2 - x$ | 9. $x^2 + 8x + 16$ |

Exercice 11.3.112 Racines évidentes

Trouver toutes les racines (évidentes) des polynômes suivants :

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $x^3 + x^2 - 6x$ | 4. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$ | 7. $x^3 + 9x^2 + 15x - 25$ |
| 2. $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ | 5. $x^3 + x^2 - 5x + 3$ | 8. $x^3 - 4x$ |
| 3. $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ | 6. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ | 9. $x^3 + 3x^2 - 18x - 40$ |

Exercice 11.3.113 Racines presque évidentes

Trouver toutes les racines des polynômes suivants :

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $3x^3 + x^2 - 22x - 24$ | 5. $-4x^3 + 15x^2 - 8x - 3$ |
| 2. $5x^3 - x^2 - 4x$ | 6. $-2x^3 + x^2 + 10x$ |
| 3. $-2x^3 + 4x^2 + 10x - 12$ | 7. $2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ |
| 4. $-x^3 + 11x^2 - 40x + 48$ | 8. $5x^3 - 19x^2 + 11x + 3$ |

factorisation

Exercice 11.3.114 Factorisation

Après avoir cherché une racine évidente des polynômes suivants, déduire une factorisation de ces polynômes, et trouver toutes leurs racines :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $2x^2 - 21x + 40$ | 6. $7x^2 + 23x - 20$ |
| 2. $3x^2 + 16x + 5$ | 7. $9x^2 + 67x + 28$ |
| 3. $-6x^2 - 5x + 1$ | 8. $-x^2 + 4x - 3$ |
| 4. $4x^2 + 6x - 18$ | 9. $-7x^2 - 14x - 7$ |
| 5. $-x^2 - 4x + 5$ | |

Exercice 11.3.115 Factorisation

Après avoir cherché une racine évidente, trouver toutes les racines des polynômes suivants, en déduire une factorisation de ces polynômes :

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| 1. $3x^3 + 18x^2 + 15x$ | 6. $3x^3 - 11x^2 + 10x$ |
| 2. $4x^3 - 6x^2 - 64x - 30$ | 7. $-3x^3 - 4x^2 + 17x + 6$ |
| 3. $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ | 8. $-5x^3 - 31x^2 - 32x + 48$ |
| 4. $-4x^3 - 41x^2 - 110x - 25$ | 9. $-3x^3 + 7x^2 + 22x - 8$ |
| 5. $x^3 - 6x^2 - x + 30$ | 10. $4x^3 - 21x^2 + 32x - 15$ |

Exercice 11.3.116 Factorisation

Après avoir cherché une racine évidente, trouver toutes les racines des polynômes suivants, en déduire une factorisation de ces polynômes :

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $-48x^3 - 352x^2 + 692x - 252$ | 7. $32x^3 - 344x^2 + 760x - 448$ |
| 2. $-48x^3 + 490x^2 - 904x + 448$ | 8. $-35x^3 + 169x^2 - 88x - 112$ |
| 3. $72x^3 + 387x^2 + 135x$ | 9. $42x^3 - 380x^2 + 14x + 36$ |
| 4. $35x^3 + 221x^2 - 454x + 144$ | 10. $-28x^3 + 171x^2 + 217x - 294$ |
| 5. $-12x^3 - 162x^2 - 600x - 576$ | 11. $20x^3 - 6x^2 - 36x$ |
| 6. $-6x^3 - 32x^2 - 46x - 12$ | 12. $-27x^3 + 102x^2 + 155x + 50$ |

Exercice 11.3.117 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.3.118 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.3.119 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.3.120 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Exercice 11.3.121 D

- | | | |
|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. |
|----|----|----|

Binôme de Newton

Degrés de polynômes

Dérivation

11.4 Matrices

Produit de matrices produit de matrice carrée par matrice colonne

produit de matrices carrées

écricome 2022

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(A + I_3)^2 (A - 2I_3) = 0_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les 'matrices' A^2 et A^3 et vérifier : $A^3 - A^2 + A = 0$.

matrice inversible ; pas inversible (relations "évidentes" entre les colonnes)

rang d'une matrice :

méthode du pivot de Gauss.

méthode par les colonnes ("échelonnées")

EML 2022

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Déterminer le rang de A .

12 Python

12.1 Comprendre un script

Comprendre les variables

Exercice 12.1.1 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 a=1
2 b=2
3 c=a+b
4 print(c)
```

Exercice 12.1.2 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 a=1
2 b=2
3 c=a+b
4 c=c+b
5 print(c)
```

Exercice 12.1.3 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 a=1
2 b=2
3 c=a+b
4 c=c+b
5 c=a+b
6
7 print(c)
```

Exercice 12.1.4 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 a=1
2 b=2
3 a=a+b
4 a=a+b
5 print(a)
```

Exercice 12.1.5 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 a=1
2 b=2
3 a=a+b
4 a=a+b
5 print(a)
```

Comprendre les tests if

Exercice 12.1.6 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 def mystere(a,b):
2     m=b
3     if a>b:
4         m=a
5     return(m)
```

Exercice 12.1.7 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 def mystere(a,b):
2     m=0
3     if a>b:
4         m=a-b
5     else:
6         m=b-a
7     return(m)
```

Exercice 12.1.8 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

`h=rd.random()` tire un nombre réel dans $[0, 1[$ aléatoirement selon une loi uniforme sur $[0, 1[$.

Code Python

```
1 def mystere(p):
2     h=rd.random()
3     if h>p:
4         resultat=0
5     else:
6         resultat=1
7     return(resultat)
```

Exercice 12.1.9 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 def mystere(a,b):  
2     m=0  
3     if a == b:  
4         m=1  
5     return(m)
```

Comprendre les boucles for

On rappelle que `range(1,n)` donne une liste de tous les entiers de 1 à $n-1$.

On rappelle que `range(n)` donne une liste de tous les entiers de 0 à $n-1$.

Exercice 12.1.10 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 s=0  
2 for k in range(1,10):  
3     s=s+k  
4 return(s)
```

Exercice 12.1.11 compréhension de Python

Que retourne ce script ?

Code Python

```
1 p=1  
2 for k in range(1,5):  
3     p=p*k  
4 return(p)
```

Exercice 12.1.12 compréhension de Python

Que retourne ce script, a et b étant dans $\mathbb{N}^*$?

Code Python

```
1 def mystere(a,b):  
2     m=1  
3     for k in range(1,b+1):  
4         m=a*m  
5     return(m)
```

Exercice 12.1.13 compréhension de Python

Que retourne ce script lorsque l'utilisateur fournit un entier naturel n ?

Code Python

```
1 def mystere(n):
2     s=0
3     for k in range(n+1):
4         s=s+k
5     return(s)
```

Exercice 12.1.14 compréhension de Python

Que retourne ce script lorsque l'utilisateur fournit un entier naturel n ?

Code Python

```
1 def mystere(n):
2     p=1
3     for k in range(1,n+1):
4         p=p*k
5     return(p)
```

12.2 Comprendre et compléter un script

- suites niveau 1 :

- 1) calculer les termes d'une suite $u_n = f(n)$
- 2) calculer les termes d'une suite récurrente simple $u_{n+1} = f(u_n)$: boucle for
- 3) calculer la somme des 20 premiers termes d'une suite avec un accumulateur. Puis la moyenne.
- 4) stocker les termes d'une suite dans une matrice et calculer la somme des 20 premiers termes. Puis la moyenne.

- suites niveau 2 : suites récurrentes doubles ou mêlées

- 5) calculer les termes d'une suite récurrente double $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$; $u_0 = 5$, $v_0 = 7$.
Avec 2 variables u et v et une auxiliaire w ; ou avec changement simultané $[u,v]=[5,7]$ puis $[u,v]=[v,3*u+2*v]$; ou avec une matrice pour stocker tous les termes : $A[0]=5$, $A[1]=7$, et boucle for.

- 6) calculer les termes de deux suites récurrentes mêlées : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n}$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

- suites niveau 3 : boucle while

- 7) calculer le premier terme qui dépasse 10^3 .

EML 2023

On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):
    k=1
    s=1
    while s<a:
```

```

        k=k+1
        s=s+1/k
    return k

```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

8) calculer le premier terme qui est plus petit que 10^{-2} .

- fonctions niveau 1 :

1) calculer les images d'un réel par une fonction

écricome 2023 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}$$

La librairie **Numpy** est importée sous la dénomination **np**.

Écrire une fonction en langage **Python** nommée **F** prenant en argument un réel x et renvoyant en sortie le réel $F(x)$.

2) calculer les images d'une suite de réels par une fonction f ; en stockant dans des matrices X et Y ; tracer le graphe.

exemple : $f : t \mapsto \sin(t^2)$ par deux méthodes : utiliser une boucle `for` ou directement le calcul matriciel $Y = np.sin(X ** 2)$.

- fonctions niveau 2 :

méthode de dichotomie

12.3 Écrire une fonction

Mêmes thèmes que précédemment

Exercice 12.3.15 Ecricome 2022

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

1. En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k , $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul, $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .
2. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Code Python

```

1 def f(x,n) :
2     t=1
3     S=1
4     for k in range(1,n+1):
5         t = t * .....
6         S = .....
7     return(S)

```

Exercice 12.3.16 EML 2022

$$c_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n$$

Écrire une fonction Python d'en-tête `def catalan(n) :` qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n .