

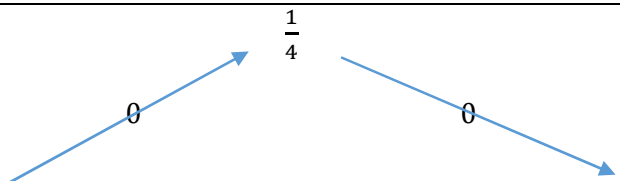
### Corrigé

1.  $f$  est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 - 2x$ .

$$\text{ET } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Et comme le coefficient directeur de  $f'(x)$  est négatif (affine avec  $-2 < 0$ ), alors

$$f'(x) \geq 0 \text{ sur } ]-\infty ; \frac{1}{2}] \text{ et } f'(x) \leq 0 \text{ sur } [\frac{1}{2} ; +\infty[.$$

| $x$               | $-\infty$                                                                          | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------|-----|-----------|
| Signe de $f'(x)$  | +                                                                                  | +   | 0             | -   | -         |
| Variations de $f$ |  |     |               |     |           |

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ , car le carré d'un réel est toujours positif. Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

3.  $u_0 \in ]0 ; 1[$ .

**Énoncé :** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  désigne : «  $0 < u_n < 1$  ».

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $0 < u_0 < 1$ .  $P(0)$  est bien vraie.

**Hérédité :** Supposons que la propriété est vérifiée pour **UN CERTAIN RANG**  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $0 < u_n < 1$ .

Et montrons, sous cette hypothèse, que  $P(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire,  $0 < u_{n+1} < 1$ .

Alors,

$0 < u_n < 1$ , par hypothèse de récurrence.

$0 < f(u_n) \leq \frac{1}{4}$ , d'après le tableau de variations de  $f$  ( $\forall x \in ]0 ; 1[$ ,  $0 < f(x) < 1$ )

$0 < u_{n+1} < 1$ .

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion :** On a  $P(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .

4. On définit la suite  $(v_n)$ , pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{1}{u_n}$ .

a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n - u_n^2} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)}$$

On constate aussi que,

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1 - u_n}{u_n(1 - u_n)} + \frac{u_n}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1 - u_n + u_n}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)}$$

D'où,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1-u_n}$$

D'une part  $v_n = \frac{1}{u_n}$  et d'autre part  $1 - u_n = 1 - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - 1}{v_n}$ , d'où  $\frac{1}{1-u_n} = \frac{v_n}{v_n - 1}$ .

Enfin,

$$v_{n+1} = v_n + \frac{v_n}{v_n - 1} = v_n + \frac{v_n - 1 + 1}{v_n - 1} = v_n + \frac{v_n - 1}{v_n - 1} + \frac{1}{v_n - 1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1}$$

**b. Énoncé :** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  désigne : «  $v_n > n$  ».

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $0 < u_0 < 1$ , donc  $v_0 = \frac{1}{u_0} > 0$ .  $P(0)$  est bien vraie.

**Hérédité :** Supposons que la propriété est vérifiée pour **UN CERTAIN RANG**  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $v_n > n$ .

Et montrons, sous cette hypothèse, que  $P(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire,  $v_{n+1} > n + 1$ .

Alors,

$$v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1} \text{ par la question 4(a).}$$

Or  $v_n > n$ , par hypothèse de récurrence, en particulier  $v_n > 1$ , donc  $\frac{1}{v_n - 1} > 0$ .

Ainsi,  $v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1} > n + 1$ . Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion :**  $P(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par le principe de récurrence,  $\forall n \geq 0$ ,  $0 < u_n < 1$ .

**c.** On a, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n > n$  donc  $0 < \frac{1}{v_n} < \frac{1}{n}$ , par la fonction inverse strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , d'où  $0 < u_n < \frac{1}{n}$ .

**d.** On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . D'où la convergence.

**5.** Dans cette question on prend  $u_0 = -2$ .

**a. Énoncé :** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  désigne : «  $u_n \leq -2^{2^n}$  ».

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a d'une part  $u_0 = -2$  et d'autre part,  $-2^{2^0} = -1^1 = -1$  donc  $u_0 \leq -2^{2^0}$ .  $P(0)$  est bien vraie.

**Hérédité :** Supposons que la propriété est vérifiée pour **UN CERTAIN RANG**  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u_n \leq -2^{2^n}$ .

Et montrons, sous cette hypothèse, que  $P(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire,  $u_{n+1} \leq -2^{2^{n+1}}$ .

Alors,

$u_n \leq -2^{2^n}$  par hypothèse de récurrence,

$f(u_n) \leq f(-2^{2^n})$ , car  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \frac{1}{2}]$

$$u_{n+1} \leq -2^{2^n} - (-2^{2^n})^2.$$

$$u_{n+1} \leq -2^{2^n} - 2^{2^n \times 2}.$$

$$u_{n+1} \leq -2^{2^n} - 2^{2^{n+1}}.$$

Or,  $-2^{2^n} < 0$ , donc  $u_{n+1} \leq -2^{2^{n+1}}$ .

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion :**  $P(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < -2^{2^n}$ .

- b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , car suite géométrique de raison  $2 > 1$ .

Par composition et produit (par  $-1$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2^{2^n}) = -\infty$ .

Par le théorème de majoration,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ . La suite  $(u_n)$  diverge.

- c. Ecrire une fonction *Seuil()* en langage Python qui permet de renvoyer l'entier naturel  $n$  à partir duquel  $u_n \leq 10^{100}$ .

```
def Seuil():  
    u=-2  
    n=0  
    while u>-10**100:  
        u=u-u**2  
        n=n+1  
    return n
```

L'appel de cette fonction renvoie  $n = 8$ . On constate la vitesse de la divergence de la suite  $(u_n)$ , en huit coups, on a déjà :  $u_8 \leq -10^{100}$ .

#### Conclusion :

On constate que le terme initial d'une suite, définie par récurrence, joue un rôle primordial dans le comportement de cette suite (monotonie, limite et vitesse vers cette limite).