

EXERCICE 3. (+)

On considère la suite (u_n) définie par une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour $n \geq 0$.

1. Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x - x^2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour les questions 3. et 4. on prend $u_0 \in]0 ; 1[$.

3. Montrer par récurrence, que $0 < u_n < 1$.
4. On définit la suite (v_n) , pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- a.** Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{v_n}{v_n - 1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1}$$

- b.** Montrer par récurrence, que $v_n > n$.
- c.** En déduire que $0 < u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
- d.** Conclure sur la convergence de la suite (u_n) .
5. Dans cette question on prend $u_0 = -2$.
- a.** Montrer par récurrence qu'on a $u_n \leq -2^{2^n}$.
- b.** La suite (u_n) est-elle convergente ?
- c.** Ecrire une fonction *Seuil()* en langage Python qui renvoi l'entier naturel n a partir duquel $u_n \leq 10^{100}$.