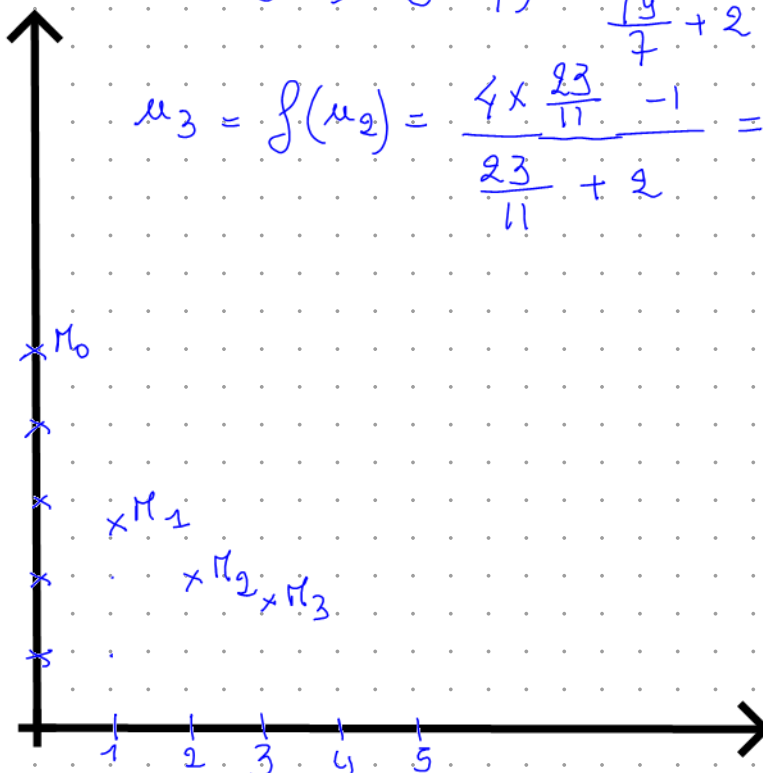


$$1a) \quad \mu_0 = 5 \quad \mu_1 = f(\mu_0) = f(5) = \frac{4 \times 5 - 1}{5 + 2} = \frac{19}{7} \approx 2,71$$

$$\mu_2 = f(\mu_1) = f\left(\frac{19}{7}\right) = \frac{4 \times \frac{19}{7} - 1}{\frac{19}{7} + 2} = \frac{23}{11} \approx 2,09$$

$$\mu_3 = f(\mu_2) = \frac{4 \times \frac{23}{11} - 1}{\frac{23}{11} + 2} = \frac{9}{5} \approx 1,8$$



$$\begin{aligned} \mu_0(0; 5) \\ \mu_1(1; \frac{19}{7}) \\ \mu_2(2; \frac{23}{11}) \\ \mu_3(3; \frac{9}{5}) \end{aligned}$$

1b) $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ alors on peut conjecturer que la suite $(u_m)_{m \geq 0}$ est décroissante et converge.

2a) Soit $P(m)$: " $u_m - 1 > 0$ ", $m \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $m = 0$.

$u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0$ alors $u_0 - 1 > 0$ alors $P(0)$ est Vraie.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$, k fixé et quelconque.

On suppose que $P(k)$ est Vraie, ie, $u_k - 1 > 0$.

Démontrons que $P(k+1)$ est Vraie, ie, $u_{k+1} - 1 > 0$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 1 &= f(u_k) - 1 = \frac{4u_k - 1}{u_k + 2} - 1 \\ &= \frac{4u_k - 1 - (u_k + 2)}{u_k + 2} \\ &= \frac{3u_k - 3}{u_k + 2} = \frac{3(u_k - 1)}{u_k + 2} \end{aligned}$$

Or $u_k - 1 > 0$ alors $u_k + 2 > 0$ et $3(u_k - 1) > 0$

Alors $\frac{3(u_k - 1)}{u_k + 2} > 0$ donc $u_{k+1} - 1 > 0$

Alors $P(k+1)$ est VRAIE.

Conclusion: $P(0)$ est Vraie
 $P(m)$ est Héréditaire } Alors $\forall m \in \mathbb{N}$,
 $u_m - 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
 2b) \quad u_{m+1} - u_m &= \frac{4u_m - 1}{u_m + 2} - u_m \\
 &= \frac{4u_m - 1 - u_m(u_m + 2)}{u_m + 2} \\
 &= \frac{4u_m - 1 - u_m^2 - 2u_m}{u_m + 2} \\
 &= \frac{-u_m^2 + 2u_m - 1}{u_m + 2} \\
 &= \frac{-1(u_m^2 - 2u_m + 1)}{u_m + 2} \\
 &= \frac{-1(u_m - 1)^2}{u_m + 2}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 < 0 \\ (u_m - 1)^2 > 0 \\ u_m + 2 > 0 \end{array} \right\} \text{Par Produit et quotient} \quad \frac{-1(u_m - 1)^2}{u_m + 2} < 0$$

$$u_{m+1} - u_m < 0$$

Alors $(u_m)_{m \geq 0}$ est décroissante.

Or $u_m - 1 > 0$ alors $u_m > 1$.

$(u_m)_{m \geq 0}$ est minorée par 1 et décroissante Alors la

suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge d'après le théorème de convergence monotone.

3°) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

$$2) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{3}{3(u_n - 1)}$$

$$= \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)}$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{(u_n - 1)}}{3 \cdot \cancel{(u_n - 1)}} = \frac{1}{3}$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{5 - 1} = \frac{1}{4}$$

Alors $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$.

$$V_m = V_0 + mR = \frac{1}{4} + m \times \frac{1}{3} = \frac{3+4m}{12}$$

$$b) \quad V_m = \frac{1}{u_m - 1} = \frac{3+4m}{12}$$

$$u_m - 1 = \frac{12}{3+4m}$$

$$u_m = \frac{12}{3+4m} + \frac{1}{1} = \frac{12+3+4m}{3+4m} = \frac{15+4m}{3+4m}$$

$$c) \quad = \frac{\cancel{m} \left(\frac{15}{m} + 4 \right)}{\cancel{m} \left(\frac{3}{m} + 4 \right)}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{15}{m} + 4 \right) = 4 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{m} + 4 \right) = 4 \end{array} \right\} \text{Par Quotient}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 1$$

On dit que $(u_m)_{m \geq 0}$ converge vers 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2 .
b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.
a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
b. Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$1) a) u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{6}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{10}{4}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

b) Soit $P(m) : "u_m > 0"$, $m \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $m = 0$

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} > 0$ alors $u_0 > 0$ donc $P(0)$ est Vraie.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, m fixé et quelconque.

Supposons que $P(m)$ est Vraie, ie, $u_m > 0$.

Démontrons que $P(m+1)$ est Vraie, ie, $u_{m+1} > 0$.

$$u_m > 0 \text{ alors } 3u_m > 0 \text{ et } 1+2u_m > 0 \\ \text{donc } \frac{3u_m}{1+2u_m} > 0$$

donc $u_{m+1} > 0$ Alors $P(m+1)$ est Vraie.

Conclusion: $P(0)$ est Vraie.

$P(m)$ est Héréditaire.

Alors
 $\left. \begin{array}{l} P(0) \text{ est Vraie} \\ P(m) \text{ est Héréditaire} \end{array} \right\} \forall m \in \mathbb{N}, u_m > 0$

$$\begin{aligned}
 2a) \quad u_{m+1} - u_m &= \frac{3u_m}{1+2u_m} - u_m \\
 &= \frac{3u_m - u_m(1+2u_m)}{1+2u_m} \\
 &= \frac{2u_m - 2u_m^2}{1+2u_m} \\
 &= \frac{2u_m(1-u_m)}{1+2u_m}
 \end{aligned}$$

$u_m < 1$ Alors $0 < 1-u_m$, $1-u_m > 0$ et $2u_m > 0$
et $1+2u_m > 0$.

Par Produit et Quotient, $\frac{2u_m(1-u_m)}{1+2u_m} > 0$.
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{u_{m+1} - u_m > 0}$

Donc $(u_m)_{m \geq 0}$ est croissante.

2b) On sait que $(u_m)_{m \geq 0}$ est croissante et majorée par 1. Alors $(u_m)_{m \geq 0}$ converge d'après le théorème de Convergence monotone.

$$\begin{aligned}
 3a) \quad v_m &= \frac{u_m}{1-u_m} \\
 v_{m+1} &= \frac{u_{m+1}}{1-u_{m+1}} = \frac{\left(\frac{3u_m}{1+2u_m} \right) \times \frac{1+2u_m}{1}}{\left(1 - \frac{3u_m}{1+2u_m} \right) \times \frac{1+2u_m}{1}}
 \end{aligned}$$



$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n-3u_n}$$

$$v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$v_{n+1} = 3v_n \quad v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Alors $(v_n)_{n \geq 0}$ est une SG de raison $q=3$ et de 1er Terme $v_0=1$.

$$b) \quad v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$$

$$c) \quad \frac{v_n}{1} = \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$v_n(1-u_n) = u_n$$

$$v_n - v_n u_n = u_n$$

$$v_n = u_n + u_n v_n$$

$$v_n = u_n(1+v_n)$$

$$\frac{v_n}{1+v_n} = u_n \quad \text{Alors} \quad u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

$$d) \quad u_n = \frac{\cancel{3^n} \times 1}{\cancel{3^n} \left(\frac{1}{\cancel{3^n}} + 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{3^n} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \quad \text{Car } 3 > 1.$$

$$\text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

$$\text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \cos(n)) = ?$$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$1 \geq -\cos(n) \geq -1 \quad \text{car } -1 < 0$$

$$n+1 \geq n - \cos(n) \geq n-1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty \quad \text{Or } n - \cos(n) \geq n-1$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \cos(n)) = +\infty$$

d'après le théorème de comparaison des limites de suites.

