

Sujet D

Capacités mises en œuvre

- ↳ Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée
- ↳ Mener un raisonnement par récurrence
- ↳ Utiliser le théorème de convergence des suites monotones
- ↳ Utiliser les théorèmes généraux sur les limites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Dans un repère orthogonal, placer les points $M_n(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 3$.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n - 1 > 0$.

b. Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. On se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de (u_n) en fonction de n . Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .