

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $-\infty$.
2. Interpréter graphiquement ces limites.
3. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

- (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
4. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a :

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$$

- (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
 - (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - (c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a :

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

5. (a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
- (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .