

Nom Prénom : NGUYEN-KHAC Matteo

T9 – Spé Maths
Durée : 1h

Continuité des fonctions

10/12/2024
Calculatrice autorisée

Cours (4 points)

Donner la définition d'une fonction continue en un réel a .

Exercice 1 (6 points)

Soit m un entier et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 8x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Déterminer la ou les valeurs de m pour laquelle (lesquelles) f est continue sur $\mathbb{R}$.

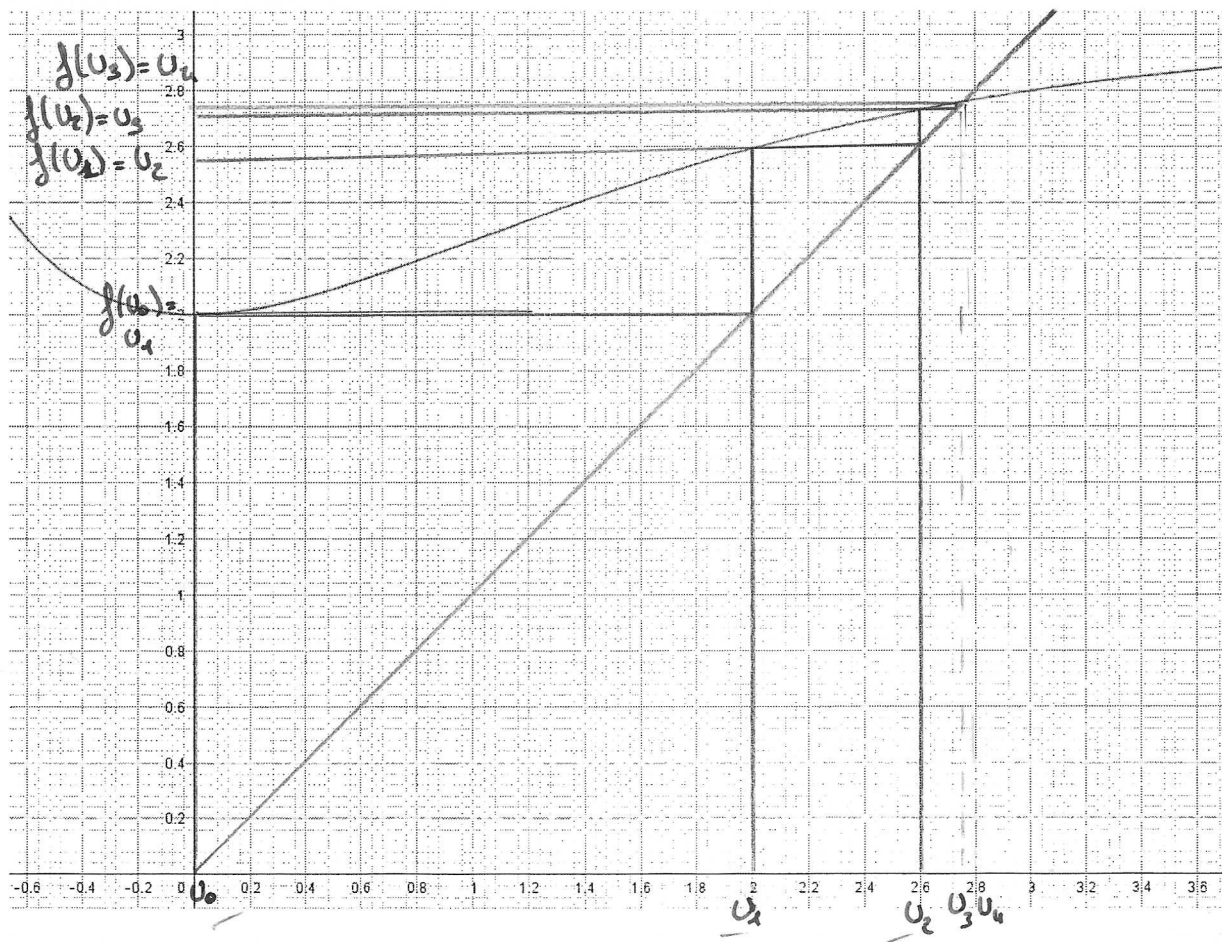
Exercice 2 (30 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - \frac{x+1}{e^x}$
ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Partie A : Conjectures sur le comportement de la suite (u_n)

Ci-dessous une représentation graphique de la fonction f .

1 – Représenter sur le graphique ci-dessous les 4 premiers termes de la suite (u_n) (on laissera les traits de construction apparents et on ne s'aidera pas du calcul des premiers termes).



Par lecture graphique uniquement :

2 – Conjecturer les variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Nom Prénom :

T9 – Spé Maths

Continuité des fonctions

10/12/2024

Durée : 1h

Calculatrice autorisée

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire g

On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

3 – Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

4 – Montrer que $g'(x) = \frac{x - e^x}{x}$

5 – En admettant le signe de $x - e^x$ (déjà vu en classe), étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

6 – Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

7 – Déterminer par balayage un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie C : Etude de la suite (u_n)

8 – Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$

9 – Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

10 – Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

11 – En déduire que la suite (u_n) est convergente.

12 – Déterminer la limite l de la suite (u_n) .

13 – Vos conjectures sont-elles confirmées ?

14 – Justifier pourquoi il existe un rang n_0 à partir duquel, les termes de la suite permettent de donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

15 – Rédiger une fonction Python « alpha » qui permet de déterminer n_0 . Quelle valeur trouvez-vous ?

$$3 - \frac{x+1}{e^x} - x$$