

$$AM \begin{cases} x_A - x_A \\ y_A - y_A \end{cases}$$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.
Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

1. Démontrer que le point $B(0; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
On note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$.
Démontrer que $AM^2 = g(x)$.
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - b. Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B .
Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB) .

