

Exercice 1

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

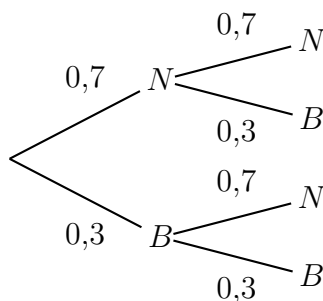
Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0,42$.

On note N l'évènement "tirer une boule noire" et B "tirer une boule blanche"



D'où : $p = P(NB) + P(BN) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7$ Donc $\boxed{p = 0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

- a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

L'expérience aléatoire, "jouer une partie", a deux issues :

- succès : "le joueur gagne" avec une probabilité de $p = 0,42$
- échec : "le joueur perd" avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

On répète cette expérience n fois de manière identique et indépendante.

Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.**

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,42^k \times 0,58^{n-k}$

- b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

Pour tout entier $n > 2$,

$$p_n = P(X \geq 1)$$

$$p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,58^n$$

$$p_n = 1 - 0,58^n$$

$$p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx 0,996 \approx p_{10}$$

- c. Déterminer, en utilisant la calculatrice, le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

$$p_8 = 1 - 0,58^8 \approx 0,987 < 0,99$$

$$p_9 = 1 - 0,58^9 \approx 0,993 > 0,99$$

Le joueur doit jouer au moins 9 parties

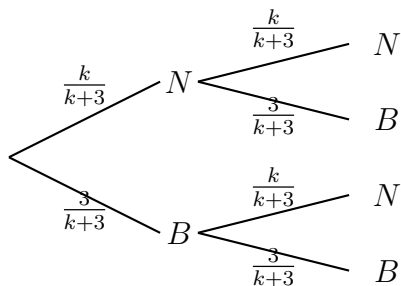
Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.



$$P(Y_k = 5) = P(NB) + P(BN)$$

$$P(Y_k = 5) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{(k+3)} + \frac{3}{(k+3)} \times \frac{k}{(k+3)}$$

Donc

$$P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$$

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

$$P(Y_k = -1) = P(NN) = \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$$

$$P(Y_k = -9) = P(BB) = \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$$

y_i	-9	-1	+5
$P(Y_k = y_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

$$E(Y_k) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \frac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$$

D'où :

$$E(Y_k) > 0 \iff k \in]3 ; 27[$$

Le jeu est favorable au joueur pour tous les entiers naturels k entre 4 et 26 inclus.

Exercice 2

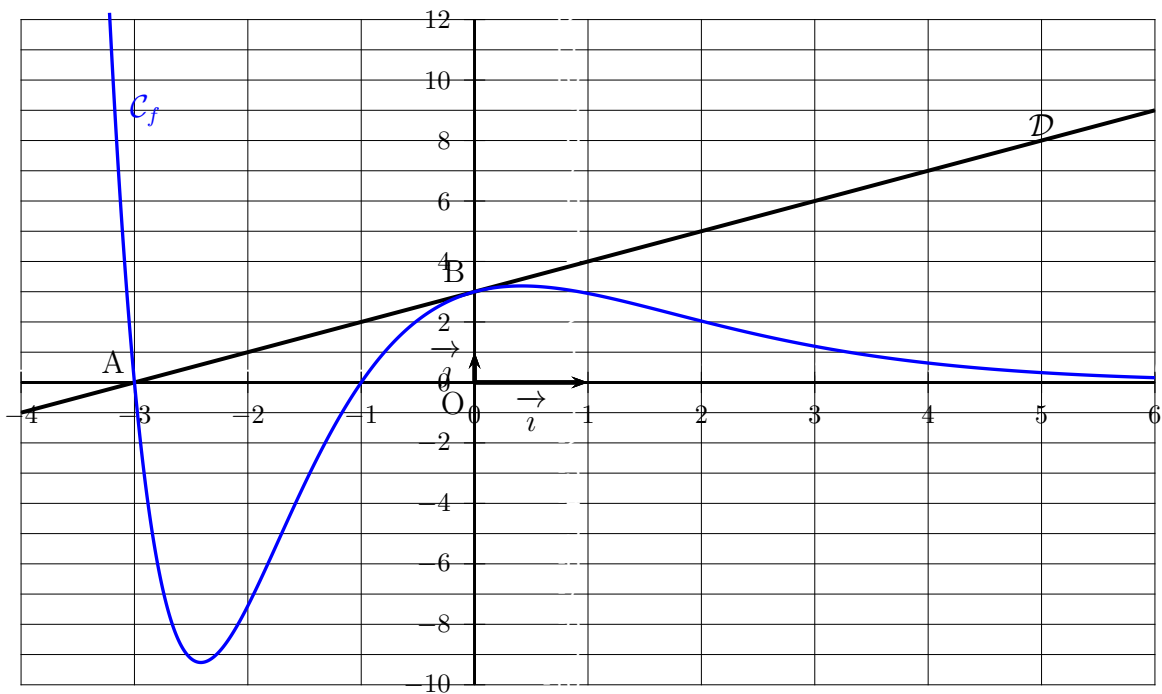
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

où a , b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que $\mathcal{C}_f$ passe par A et que la droite $\mathcal{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

Les coordonnées du point A sont $(-3 ; 0)$ et celles de B sont $(0 ; 3)$
Comme A et B appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ on a :

$$f(-3) = 0 \text{ et } f(0) = 3$$

- b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = 1$$

De plus l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est 3

Donc l'équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$

La droite (AB) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 donc $f'(0) = 1$

2. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On pose, $u(x) = ax^2 + bx + c$ alors $u'(x) = 2ax + b$

$v(x) = e^{-x}$ alors $v'(x) = -e^{-x}$

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c)$$

$$f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c .

$$f'(0) = (-a \times 0^2 + (2a - b) \times 0 + b - c)e^{-0} = b - c$$

3. a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a , b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

D'après la question 1a) $f(-3) = 0$ donc $(9a - 3b + c)e^{-3} = 0 \Leftrightarrow 9a - 3b + c = 0$

D'après la question 1b) $f'(0) = 1$ donc $b - c = 1$

D'après la question 1a) $f(0) = 3$ donc $c = 3$

Donc les réels a, b et c sont solutions du système

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3 \times 4 + 3 = 0 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout réel x

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$$

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

1. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$.

En utilisant le résultat de la partie A

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \text{ avec } a = 1, b = 4 \text{ et } c = 3$$

$$\text{Donc } f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

2. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

Pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $(-x^2 - 2x + 1)$ car $e^{-x} > 0$

Pour étudier le signe de ce trinôme on calcule son discriminant puis les racines éventuelles

$$\Delta = 8, x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{-2} = -1 + \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$$

Le trinôme est négatif à l'extérieur des racines. (car $a = 1 < 0$)

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$	∞
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}+1}$ $(2\sqrt{2}+2)e^{1-\sqrt{2}}$				

3. Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.

Pour étudier la convexité de f , on étudie le signe de la dérivée seconde

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On pose,

$$u(x) = -x^2 - 2x + 1 \text{ alors } u'(x) = -2x - 2$$

$$v(x) = e^{-x} \text{ alors } v'(x) = -e^{-x}$$

Pour tout réel x ,

$$f''(x) = (-2x - 2)e^{-x} - e^{-x}(-x^2 - 2x + 1)$$

$$f''(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})e^{-x}$$

$x^2 - 3$ est un trinôme de racines réelles $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ et de coefficient dominant $1 > 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞	
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
convexité de f	convexe		concave		convexe

4. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

La dérivée seconde de f s'annule et change de signe pour $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$
 $f(-\sqrt{3}) = ((-\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} + 3)e^{\sqrt{3}} = (6 - 4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$
 $f(\sqrt{3}) = ((\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 3)e^{-\sqrt{3}} = (6 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}$
La courbe de f admet donc deux points d'inflexion de coordonnées :

$$\left(-\sqrt{3} ; (6 - 4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}} \right) \text{ et } \left(\sqrt{3} ; (6 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} \right)$$

Exercice 3

Pour le plaisir hors barème

Soit f une fonction définie, dérivable sur $[0 ; +\infty[$, concave sur cet intervalle et telle que $f(0) = 0$. On souhaite montrer que f est sous-additive, c'est à dire, pour tous réels x et y positifs, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
Pour tout réel $y \geq 0$, soit g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x+y) - f(x)$$

1. Justifier que g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonction dérivables sur $[0 ; +\infty[$
Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = f'(x+y) - f'(x)$

2. Sans dériver, justifier que f' est décroissante.

La fonction f est concave sur $[0 ; +\infty[$ donc sa dérivée f' est décroissante sur cet intervalle

3. En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$

f' est décroissante et $y \geq 0$ donc $f'(x+y) \leq f'(x)$ donc $g'(x) \leq 0$ pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$
La fonction g est donc décroissante sur $[0 ; +\infty[$
Pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $g(x) \leq g(0)$

4. Conclure

D'après la question 3
Pour tous réels x et y positifs ,

$$\begin{aligned} g(x) \leq g(0) &\Leftrightarrow f(x+y) - f(x) \leq g(0) \\ &\Leftrightarrow f(x+y) - f(x) \leq f(y) - f(0) \text{ or } f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x+y) \leq f(y) + f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est bien sous-additive