

Exercice 1

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

- a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .
- b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
- c. Déterminer, en utilisant la calculatrice, le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 2

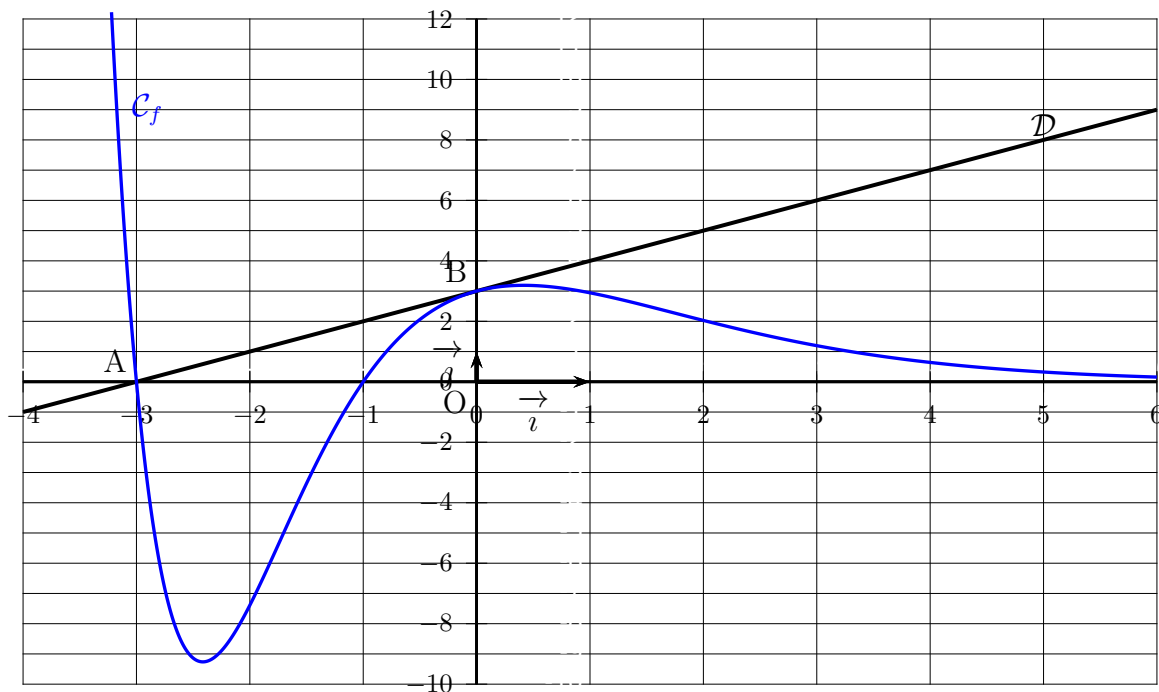
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$$

où a , b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que $\mathcal{C}_f$ passe par A et que la droite $\mathcal{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

1.
 - a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B. En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.
 - b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.
2.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c) e^{-x}$.
 - b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c .
3.
 - a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a , b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

- b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3) e^{-x}.$$

1. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$.
2. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.
4. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3

Pour le plaisir hors barème

Soit f une fonction définie, dérivable sur $[0 ; +\infty[$, concave sur cet intervalle et telle que $f(0) = 0$. On souhaite montrer que f est sous-additive, c'est à dire, pour tous réels x et y positifs, $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$

Pour tout réel $y \geq 0$, soit g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x+y) - f(x)$$

1. Justifier que g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Justifier que f' est décroissante.
3. En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$
4. Conclure