

Continuité

Exercice 1

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ -3x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
2. Étudier la continuité en 2 de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ -3x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Correction exercice 1

1. f est continue sur $] -\infty ; 2[$ comme fonction polynôme.

f est continue sur $]2 ; +\infty[$ comme fonction polynôme.

Étude de la continuité de f en 2 :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 - 4x + 5) = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (-3x + 7) = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 1$
- $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. • $g(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (-3x + 5) = -1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x) = -1$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x) \neq g(2)$ donc g n'est pas continue en 2.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$.

1. On considère la fonction f définie sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
 - a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.
2. Pour la suite de l'exercice, on remarquera que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
 - b. Justifier que la suite (v_n) est convergente.
 - c. On note ℓ la limite de la suite (v_n) . Justifier que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis en déduire la valeur de ℓ .

Correction exercice 2

1. a. Soit $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x \Leftrightarrow 1,6x - 1,6x^2 = x \Leftrightarrow 0,6x - 1,6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(0,6 - 1,6x) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $0,6 - 1,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8}$

b. La fonction f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynôme.

Pour tout $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1,6 - 1,6 \times 2x = 1,6 - 3,2x$.

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \geq -3,2x \geq -1,6$ en multipliant par $-3,2 < 0$, d'où $1,6 - 3,2x \geq 0$

On a donc $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ donc f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ la propriété : « $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$v_0 = 0,1$ et $v_1 = f(v_0) = f(0,1) = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144$ donc on a bien $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, sous cette hypothèse, $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

En appliquant la fonction f qui est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on obtient :

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Or, $f(0) = 1,6 \times 0 - 1,6 \times 0^2 = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times \frac{1}{2} - 1,6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,4 \leq \frac{1}{2}$,

$f(v_n) = v_{n+1}$ et $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$

On a donc $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n . On a donc, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \frac{1}{2}$ donc (v_n) est majorée.

La suite (v_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

c. • Pour justifier que $f(\ell) = \ell$, on peut utiliser l'une des deux rédactions suivantes :

Rédaction 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

La suite (v_n) converge vers ℓ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(\ell)$. Par unicité de la limite, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Rédaction 2. La suite (v_n) converge vers ℓ . De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f fonction continue car dérivable. Donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

- La limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question 1.a., on a $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{8}{3}$.

Or, la suite (v_n) est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_0 \leq v_n$ d'où $v_0 \leq \ell$.

Puisque $v_0 = 0, 1 > 0$, on en déduit que $\ell > 0$. On a donc nécessairement $\ell = \frac{3}{8}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20 ; 20]$ par $f(x) = (-2x + 30)e^{0,2x-3}$.

- Montrer que $f'(x) = (-0,4x + 4)e^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20 ; 20]$.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-20 ; 20]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f .
- Montrer que, sur l'intervalle $[-20 ; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
 - Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Correction exercice 3

- La fonction f est dérivable sur $[-20 ; 20]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[-20 ; 20]$. $\forall x \in [-20 ; 20]$,

$$f'(x) = -2e^{0,2x-3} + (-2x + 30) \times 0,2 \times e^{0,2x-3} = e^{0,2x-3}(-2 - 0,4x + 6) = e^{0,2x-3}(-0,4x + 4)$$

- Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[-20 ; 20]$.

Sur $[-20 ; 20]$, $e^{0,2x-3} > 0$ car exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du signe de $-0,4x + 4$ (fonction affine de coefficient directeur $-0,4 < 0$).

$$-0,4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{0,4} = 10$$

x	-20	10	20
Signe de $-0,4x + 4$	+	0	-
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$ \begin{array}{ccc} & 10e^{-1} & \\ \nearrow & & \searrow \\ 70e^{-7} & & -10e \end{array} $		

- Sur l'intervalle $[-20 ; 10]$ la fonction f est positive donc l'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution.
Sur l'intervalle $[10 ; 20]$ la fonction f est dérivable donc continue et strictement décroissante.
 $f(10) = 10e^{-1} \simeq 3,7$ et $f(20) = -10e \simeq -27,2$, donc $-2 \in]f(20) ; f(10)[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[10 ; 20]$.
Finalement, sur l'intervalle $[-20 ; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
 - À l'aide d'une calculatrice, on obtient :
 $f(15) = 0 > -2$ et $f(16) \simeq -2,443 < -2$ donc $15 < \alpha < 16$.
 $f(15,8) \simeq -1,877 > -2$ et $f(15,9) \simeq -2,154 < -2$ donc $15,8 < \alpha < 15,9$.