

## Exercice 1

11 points

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-5; 1]$  par

$$f(x) = (2 - x^2)e^x.$$

1. On désigne par  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Montrer que l'on a, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-5; 1]$ ,  $f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x$ .

$f$  est dérivable sur  $[-5; 1]$  comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel  $x$  de  $[-5; 1]$  :

$$f'(x) = -2xe^x + (2 - x^2)e^x$$

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x$$

2. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-5; 1]$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(2) = 12 > 0$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} - 1 \text{ et } x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} - 1$$

Pour tout réel  $x$  de  $[-5; 1]$ ,  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $a = -1$  à l'extérieur des racines

$$f(-5) = (2 - 5^2)e^{-5} = -23e^{-5}$$

$$f(-\sqrt{3} - 1) = (2 - (-\sqrt{3} - 1)^2)e^{-\sqrt{3} - 1} = (-2\sqrt{3} - 2)e^{-\sqrt{3} - 1}$$

$$f(\sqrt{3} - 1) = (2 - (\sqrt{3} - 1)^2)e^{\sqrt{3} - 1} = (2\sqrt{3} - 2)e^{\sqrt{3} - 1}$$

$$f(1) = (2 - 1^2)e^1 = e$$

D'où le tableau de variations de la fonction  $f$ .

| $x$               | $-5$        | $-\sqrt{3}-1$                   | $\sqrt{3}-1$                  | $1$ |     |
|-------------------|-------------|---------------------------------|-------------------------------|-----|-----|
| signe de $f'(x)$  | $-$         | $0$                             | $+$                           | $0$ | $-$ |
| Variations de $f$ | $-23e^{-5}$ |                                 | $(2\sqrt{3}-2)e^{\sqrt{3}-1}$ |     | $e$ |
|                   |             | $(-2\sqrt{3}-2)e^{-\sqrt{3}-1}$ |                               |     |     |

3. On considère une fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[-5; 1]$  par

$$F(x) = ax(b - x)e^x.$$

- a. Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  telles que la fonction  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $[-5; 1]$ .

$F$  est dérivable sur  $[-5; 1]$  comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout  $x \in [-5; 1]$ ,

$$F(x) = (abx - ax^2)e^x$$

$$F'(x) = (ab - 2ax)e^x + (abx - ax^2)e^x = e^x(-ax^2 + x(ab - 2a) + ab)$$

Par identification avec  $f(x) = (2 - x^2)e^x$

On obtient  $a = 1$ ,  $b - 2 = 0$  et  $b = 2$

Donc la fonction  $F$  définie sur  $[-5; 1]$  par  $F(x) = x(2 - x)e^x$  est une primitive de  $f$  sur  $[-5; 1]$

- b. Déterminer l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $[-5; 1]$ .

Les primitives de  $f$  sur  $[-5; 1]$  sont les fonctions  $F_k$  définies sur  $[-5; 1]$  par :

$$F(x) = x(2-x)e^x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- c. En déduire l'unique primitive  $G$  de  $f$  qui s'annule en 1.

On cherche  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $F_k(1) = 0$ .

$$F_k(1) = 0 \Leftrightarrow 1(2-1)e^1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -e.$$

La fonction  $G$  est donc définie sur  $[-5; 1]$  par  $G(x) = x(2-x)e^x - e$

4. a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $[-5; 1]$ .

La fonction  $f'$  est dérivable sur  $[-5; 1]$ , comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel  $x$  de  $[-5; 1]$  :

$$f''(x) = (-2x-2)e^x + (-x^2-2x+2)e^x = e^x(-2x-2-x^2-2x+2) = -x(x+4)e^x$$

$f''(x)$  est du signe de  $-x(x+4)$  qui s'annule en  $-4$  et en  $0$

On obtient donc :

| $x$               | -5      | -4 | 0       | 1 |         |
|-------------------|---------|----|---------|---|---------|
| Signe de $f''(x)$ | -       | 0  | +       | 0 | -       |
| Convexité de $f$  | concave |    | convexe |   | concave |

- b. Montrer que la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  possède deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

La dérivée seconde s'annule et change de signe  $-4$  et en  $0$ . Donc la courbe de  $f$  admet deux points d'inflexion  $A$  et  $B$  d'abscisse respective  $-4$  et  $0$

$$f(-4) = (2-4^2)e^{-4} = -14e^{-4}$$

$$f(0) = (2-0^2)e^0 = 2$$

Les deux points d'inflexion de la courbe de  $f$  sont  $A(-4; -14e^{-4})$  et  $B(0; 2)$

## Exercice 2

8 points

En mai 2020, une entreprise a fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où  $u_n$  désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de  $n$  mois après le mois de mai 2020.

1. calculer  $u_1$  et interpréter dans le contexte de l'exercice.

$$u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

Un mois après la mise en place de cette nouvelle mesure 3 000 collaborateurs sont satisfaits

2. Démontrer que la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

$f$  est une fonction rationnelle définie sur  $[0 , +\infty[$  donc elle est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x \in [0 ; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$  sur  $[0 , +\infty[$ , donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ .

- **Initialisation**  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 3$

$0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ , soit  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ , donc la propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

- **Hérédité** On suppose qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que la propriété vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ , montrons que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie

Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$  donc sur  $[0 ; 4[$ .

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$. f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geq 0; f(u_n) = u_{n+1}; f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(4) = \frac{24}{6} = 4$$

On a donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ , donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

On a donc démontré que pour tout  $n$ , on a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ .

- b. Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente.

- Pour tout  $n$ , on a ;  $u_n \leq u_{n+1}$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Pour tout  $n$ , on a ;  $u_n \leq 4$  donc la suite  $(u_n)$  est majorée.

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

- c. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

La suite  $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  ; or  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  donc la suite  $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4.$$

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

**Exercice 3****5 points**

Un supermarché possède 30 caisses. La probabilité qu'un jour donné une caisse soit en panne est  $\frac{1}{40}$ .  
Les pannes d'une caisse à l'autre se produisent de façon indépendante.  
On donnera les résultats à  $10^{-3}$  près.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

On répète 30 fois la même expérience aléatoire « choisir une caisse » de manière identique et indépendante. Il y a deux issues :

- le succès « la caisse choisie est en panne », de probabilité  $p = \frac{1}{40}$
- l'échec, de probabilité  $1 - p = \frac{39}{40}$ .

$X$  compte le nombre de succès à l'issue de ces 30 répétitions.

Donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 30$  et  $p = \frac{1}{40}$ .

$$\forall k \in [0 ; 30], P(X = k) = \binom{30}{k} \times \left(\frac{1}{40}\right)^k \times \left(\frac{39}{40}\right)^{30-k}$$

2. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait exactement 2 caisses en panne?

$$P(X = 2) = \binom{30}{2} \times \left(\frac{1}{40}\right)^2 \times \left(\frac{39}{40}\right)^{28} \approx 0.134 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité qu'un jour donné il y ait exactement 2 caisses en panne est d'environ 0,134.

3. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 1 caisse en panne?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \binom{30}{0} \times \left(\frac{1}{40}\right)^0 \times \left(\frac{39}{40}\right)^{30}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,532 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 1 caisse en panne est d'environ 0,532

4. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 4 caisses en panne?

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$P(X \geq 4) \approx 0,006 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 4 caisses en panne est d'environ 0,006

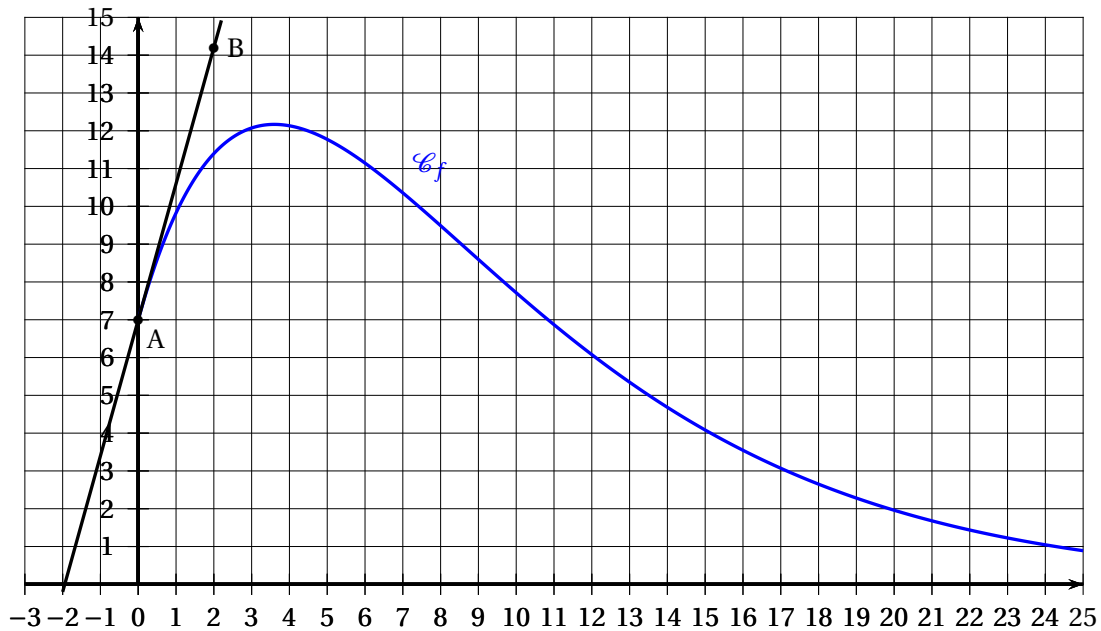
**Exercice 4****6 points**

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 25]$  par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-0,2x}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

On a représenté également sa tangente  $T$  au point A(0 ; 7).  $T$  passe par le point B(2 ; 14,2).



1. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 6$ .

Dans la limite de précision du graphique, l'équation  $f(x) = 6$  admet comme solution  $\alpha \approx 12$ .

2. a. Déterminer, par un calcul, le coefficient directeur de la droite  $T$ .

Cherchons la pente de la droite  $T$  passant par  $A$  et  $B$  :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{14,2 - 7}{2 - 0} = 3,6$

- b. Exprimer, pour tout  $x \in [0 ; 25]$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0 ; 25]$  comme produit et composée de fonction dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in [0 ; 5]$ ,  $f(x)$  est de la forme  $u(x) \times v(x)$

Avec  $u(x) = (ax + b)$  ;  $u'(x) = a$  et  $v(x) = e^{-0,2x}$ ,  $v'(x) = -0,2e^{-0,2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \times e^{-0,2x} + (ax + b) \times -0,2e^{-0,2x} \\ &= e^{-0,2x} (a + (ax + b) \times -0,2) \\ &= e^{-0,2x} (a - 0,2ax - 0,2b) \\ &= e^{-0,2x} (-0,2ax + a - 0,2b) \end{aligned}$$

- c. Montrer que  $a$  et  $b$  sont solutions du système

$$\begin{cases} a - 0,2b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$$

En déduire l'expression de  $f$ .

Nous savons que  $A \in C_f$  donc  $f(0) = 7$ . De plus D'après la question 2.a),  $f'(0) = 3,6$ .

La première égalité se traduit par :  $(a \times 0 + b)e^{-0,2 \times 0} = 7 \iff b = 7$

La seconde donne quant à elle :  $e^{-0,2 \times 0} (-0,2a \times 0 + a - 0,2b) = 3,6 \iff a - 0,2b = 3,6$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a - 0,2b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$$

On remplace  $b$  par 7 dans la première équation, puis on trouve :  $\begin{cases} a &= 3,6 + 0,2 \times 7 = 5 \\ b &= 7 \end{cases}$ .

Donc la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 25]$  par  $f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}$ .