

Exercice 1

11 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$f(x) = (2 - x^2)e^x.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5; 1]$,

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x.$$

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-5; 1]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. On considère une fonction F définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$F(x) = ax(b - x)e^x.$$

- a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de f sur $[-5; 1]$.
- b. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $[-5; 1]$.
- c. En déduire l'unique primitive G de f qui s'annule en 1.
4. a. Étudier la convexité de la fonction f sur $[-5; 1]$.
- b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

Exercice 2

8 points

En mai 2020, une entreprise a fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. calculer u_1 et interpréter dans le contexte de l'exercice.
2. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
4. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 3**5 points**

Un supermarché possède 30 caisses. La probabilité qu'un jour donné une caisse soit en panne est $\frac{1}{40}$.
Les pannes d'une caisse à l'autre se produisent de façon indépendante.
On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait exactement 2 caisses en panne?
3. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 1 caisse en panne?
4. Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 4 caisses en panne?

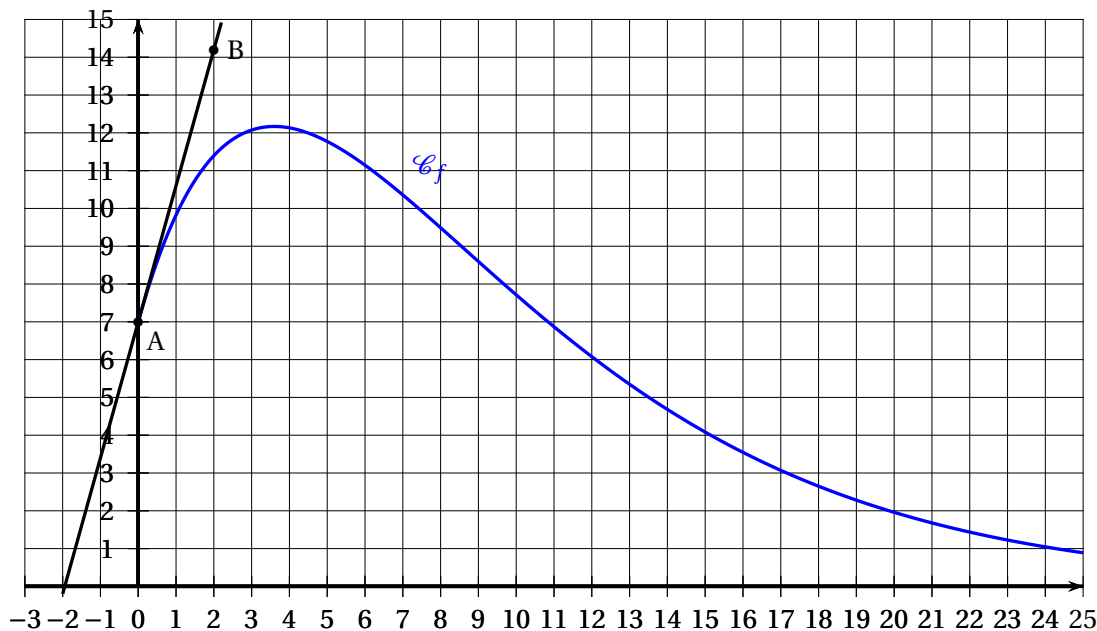
Exercice 4**6 points**

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0; 25]$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels.

On a représenté également sa tangente T au point $A(0; 7)$. T passe par le point $B(2; 14,2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.
2.
 - a. Déterminer, par un calcul, le coefficient directeur de la droite T .
 - b. Exprimer, pour tout $x \in [0; 25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b .
 - c. Montrer que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a - 0,2b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$$

En déduire l'expression de f .