

Devoir Maison n° :1

Durée : Toussaint- Rentrée

La calculatrice est autorisée.

Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible d'être modifié.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : Les entiers de Gauss

5 points

On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs. Ainsi,

$$A = \{a + ib\sqrt{3} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

- Justifier que $\mathbb{Z} \subset A$.
- Soient a, b, c, d des entiers relatifs. On considère les deux éléments $z = a + ib\sqrt{3}$ et $z' = c + id\sqrt{3}$ appartenant à A . Montrer que $z = z'$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
- Soient z et z' deux éléments de A . Montrer que $z + z'$, $z - z'$, zz' et $\bar{z}$ appartiennent à A .
- Soit $z \in A$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n \in A$.
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « pour tout élément non nul z de A , le nombre complexe $\frac{1}{z}$ appartient à A ».
- On pose, pour tout $z \in A$, $N(z) = z\bar{z}$.
 - Montrer que, pour tout $z \in A$, $N(z) \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que, pour tout $(z, z') \in A^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
 - Soit $z \in A$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(z^n) = N(z)^n$.
- Soit z un élément non nul de A . Montrer que $\frac{1}{z}$ appartient à A si et seulement si $N(z) = 1$.
 - En déduire l'ensemble des éléments non nuls $z \in A$ tels que $\frac{1}{z} \in A$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $(E_n) : x^2 + 3y^2 = k^n$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
 - En utilisant certaines des questions précédentes, montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - (P_1) : « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) possède au moins une solution » ;
 - (P_2) : « (E_1) possède au moins une solution ».
 - Les propositions P_1 et P_2 sont-elles équivalentes à la proposition suivante ?
 - (P_3) : « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (E_n) possède au moins une solution ».

Exercice 2 : Suites et arithmétique

4 points

Soit $a \in \mathbb{Z}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 12$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

- Dans cette question, on suppose que $a = 9$.
 - Calculer u_1 , u_2 et u_3 et vérifier que ces entiers sont tous divisibles par 3.
 - Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 3.
- On suppose a quelconque (mais toujours entier) et on considère un diviseur d de 12. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d divise u_n ;
- d divise a .

Exercice 3 : Division euclidienne

4 points

Soient a et b deux entiers tels que $b > 0$. On note q le reste dans la division euclidienne de $a - 1$ par b et Q le reste dans la division euclidienne de $ab - 1$ par b^2 .

1. Déterminer q et Q dans chacun des cas suivants :

- (a) $a = 17$ et $b = 5$; (b) $a = 29$ et $b = 12$; (c) $a = 125$ et $b = 17$.

2. Conjecturer un lien entre Q et q , puis démontrer cette conjecture.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de q , le quotient dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

Exercice 4 : Divisibilité et congruence

4 points

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{5n} - 5^{3n}$.

1. Calculer A_0 , A_1 , A_2 et A_3 , et vérifier qu'ils sont tous divisibles par 118.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 3^5 \times A_n + 118 \times 5^{3n}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un multiple de 118.

Exercice 5 : Divisibilité

4 points

Soit a un entier naturel et b un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $2^b - 1$ ne divise pas $2^a + 1$.

Pour tout entier naturel $n > 2$, on considère la proposition suivante :

$P(n)$: « quels que soient les entiers consécutifs $a_1, a_2, \dots, a_n$, n divise $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. »

1. La proposition $P(2)$ est-elle vraie ?

2. Montrer que $P(3)$ est vraie.

3. Les propositions $P(4)$ et $P(5)$ sont-elles vraies ?

4. À partir des résultats précédents, émettre une conjecture concernant l'ensemble des entiers naturels $n > 2$ tel que $P(n)$ est vraie.

5. Démontrer la proposition précédente.

6. Soit un entier $n > 2$. Considérons n entiers consécutifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et posons $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Déterminer, selon la valeur de n , le reste dans la division euclidienne de S_n par n .

Exercice 6 : Facultatif

4 points

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer le plus petit entier naturel n pour lequel il existe des entiers naturels non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$.

Exercice 7 : Facultatif

4 points

Soit a un entier naturel et b un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $2^b - 1$ ne divise pas $2^a + 1$.

Le barème est donné à titre indicatif.