

Nom Prénom : NGUYEN KHAC MATHEO

durée : 1h

Calculatrice autorisée

Cours (4 points)

- 1- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.
- 2- Enoncer le théorème des gendarmes.

Exercice 1 (4 points)

Déterminer les limites des suites suivantes (justifier la réponse) :

1. $u_n = \sqrt{n} + (-1)^n$
2. $v_n = 5 - \frac{\cos n}{n}$
3. $w_n = 8^n - 3^n$
4. $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = -20$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Exercice 2 (12 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a acheté surgelé. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C .

On note T_n la température des gâteaux en degrés Celsius, au bout de n minutes après la sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \text{ entier naturel : } T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25).$$

PARTIE A : ETUDE DE LA CONVERGENCE DE LA SUITE (T_n)

1. Justifier que pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
2. Calculer T_1 et T_2 . Arrondir les réponses au dixième près.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , on a $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible ?
4. Etudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. En déduire que la suite (T_n) converge.

PARTIE B : ETUDE DE LA LIMITE DE LA SUITE (T_n)

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = T_n - 25$

6. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison.
7. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$
8. En déduire la limite de la suite (T_n) (justifier la réponse). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C : INTERPRETATION

9. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
10. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n > 10$.
Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue :

```
def seuil() :  
    n=0  
    T= .....  
    while T.....  
        T= .....  
        n=n+1  
    return .....
```

11. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.