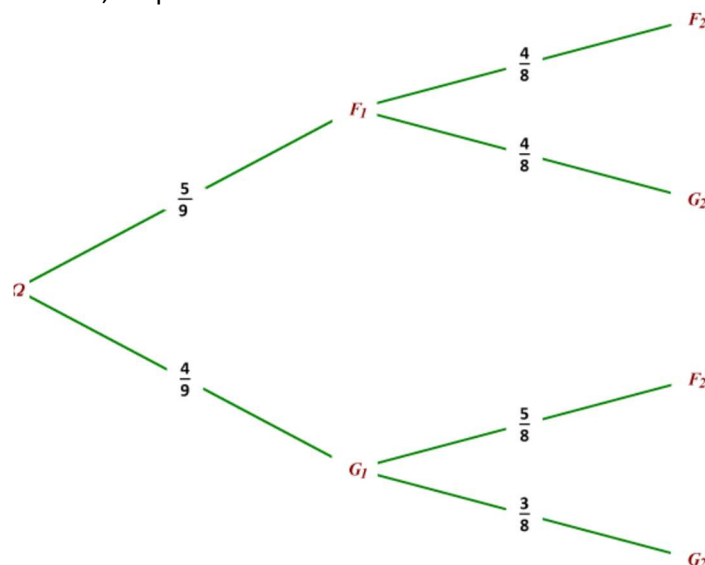


### Devoir maison n°1 : Suites et probabilités conditionnelles

#### EXERCICE 1.

Voici un arbre qui illustre la situation, les pondérations sont calculées ci-dessous.



1. Par équiprobabilité, on calcule :

a.  $P_{G_1}(F_2) = \frac{5}{8}$  (il reste 5 filles et seulement 3 garçons).

b.  $P(G_1 \cap F_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(F_2)$ , soit  $P(G_1 \cap F_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$ .  
 $P(F_1 \cap G_2) = P(F_1) \times P_{F_1}(G_2)$ , soit  $P(F_1 \cap G_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ .  
 Ainsi,  $P(G_1 \cap F_2) = P(F_1 \cap G_2)$ .

2.  $P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P_{F_1}(F_2)$ , soit  $P(F_1 \cap F_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ .

3. On cherche  $P(F_2)$ .

Les événements  $G_1$  et  $F_1$  forment une partition de l'univers, par la propriété des probabilités totales, on a :

$$P(F_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(F_2) + P(F_1) \times P_{F_1}(F_2) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}. \text{ O}$$

4. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

a. Les valeurs possibles de la variable aléatoire  $X$  sont 0, 1 ou 2. Soit  $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ .

$$P(X = 0) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = P(F_1 \cap G_2) + P(G_1 \cap F_2) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$$

$$P(X = 2) = P(F_1 \cap F_2) = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Et } P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} + \frac{5}{18} = \frac{3+10+5}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

D'où la loi de probabilité de  $X$ .

b.  $E(X) = 0 \times \frac{5}{18} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{5}{18} = \frac{10+10}{18} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$ .

**EXERCICE 2.**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$ , par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

**Partie A.**

1.  $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -2 + 6 - 1,5 = 2,5.$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -3,125 + 7,5 - 1,5 = 2,875.$$

2. Par la calculatrice, on obtient  $u_3 \approx 2,99219$  et  $u_4 \approx 2,99999$ .

3. Conjectures : Il semble que la suite  $(u_n)$  est croissante et que sa limite existe et qui vaut 3.

**Partie B.**

On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - 3$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2.$$

Soit  $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ . On utilise  $a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2 \times 3 \times a + 3^2 = (a - 3)^2$ .

2. Enoncé : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  désigne : «  $-1 \leq v_n \leq 0$  ».

**Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ , d'où  $-1 \leq v_0 \leq 0$ .  $P(0)$  est bien vraie.

**Hérédité** : Supposons que la propriété est vérifiée pour **UN CERTAIN RANG**  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $-1 \leq v_n \leq 0$ .

Et montrons que, sous hypothèse,  $P(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire,  $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$ .

Alors,

$-1 \leq v_n \leq 0$ , par hypothèse de récurrence.

$0 \leq v_n^2 \leq 1$ , car la fonction carrée est décroissante sur  $[-1; 0]$

$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$ , car on multiplie par  $-\frac{1}{2} < 0$ .

Soit  $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$ , puisque  $-1 \leq -\frac{1}{2}$ .

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion** : On a  $P(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq v_n \leq 0$ .

**3.**

a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n$ . On force la factorisation par  $-v_n$ , on obtient :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left( \frac{1}{2}v_n - \frac{v_n}{-v_n} \right) = -v_n \left( \frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

b. Il suffit d'étudier le signe de  $v_{n+1} - v_n$  sous sa forme factorisée trouvée ci-dessus.

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $v_n \leq 0$  (voir B.2) donc  $-v_n \geq 0$ . De plus,  $-1 \leq v_n \leq 0$  donc  $-\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$

Soit  $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$ . Ainsi,  $-v_n \left( \frac{1}{2}v_n + 1 \right) \geq 0$ , d'où  $v_{n+1} \geq v_n$ . La suite  $(v_n)$  est croissante.

4. La suite  $(v_n)$  est croissante et minorée par 0, donc elle est convergente vers un réel, par le théorème de la convergence monotone.
5.  $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \ell + \frac{1}{2}\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell\left(1 + \frac{1}{2}\ell\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -2$ .  
Or, pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq v_n \leq 0$ , donc  $\ell = 0$ .
6.  $\forall n \geq 0, v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3$ .  
D'une part,  $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + 3 - (v_n + 3) = v_{n+1} + 3 - v_n - 3 = v_{n+1} - v_n \geq 0$ .  
D'où  $u_{n+1} \geq u_n$ .  
Et d'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et par somme de limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = 3$ .  
Les conjectures de la partie **A** sont bien valides.
7. Ci-dessous la fonction Python qui envoie le premier entier naturel  $n$  tel que  $|u_n - 3| < 10^{-9}$ .

```
def distance():
    n=0
    u=2
    while abs(u-3)>=10**(-9):
        u=-0.5*u**2+3*u-1.5
        n=n+1
    return n
```

La fonction `distance()` renvoie  $n = 5$ .