

Devoir maison n°1 : Suites et probabilités conditionnelles

EXERCICE 1.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Neuf amis, quatre garçons et cinq filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres dans une soirée. Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte. L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.

On définit les événements G_1 , G_2 , F_1 , F_2 par :

- G_1 : « un garçon est désigné au premier tirage »
- G_2 : « un garçon est désigné au deuxième tirage »
- F_1 : « une fille est désignée au premier tirage »
- F_2 : « une fille est désignée au deuxième tirage ».

1.

a. Déterminer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au second tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

b. Calculer la probabilité de l'événement $G_1 \cap F_2$. La comparer à celle de l'événement $F_1 \cap G_2$.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.

3. Calculer la probabilité que le hasard désigne une fille au deuxième tirage.

4. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B.

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
 - b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n) et on admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$. Déterminer la valeur de ℓ .
6. Les conjectures de la partie A sont-elles validées ?
7. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le premier entier naturel n tel que $|u_n - 3| < 10^{-9}$ et déterminer la valeur de n .

```
def distance():
    n=0
    u=...
    while abs(u-3).....
        u=.....
        n=...
    return n
```